MODEL *FIXED EFFECT*
PADA ANALISIS DATA POOLING

SKRIPSI

**Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
untuk memenuhi sebagian persyaratan
guna memperoleh gelar Sarjana Sains**

Disusun oleh:

Musringatun

NIM. 013114757

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2008

PERSETUJUAN

SKRIPSI

MODEL *FIXED EFFECT*
PADA ANALISIS DATA POOLING

Telah disetujui dan disahkan pada tanggal

2008

untuk dipertahankan di depan Tim Penguji Skripsi

Fakultas Matematika dan Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Disetujui oleh

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Endang Listyani, M.S	Elly Arliani, M.Si
NIP. 131 569 343	NIP. 131 993 532

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini saya :

Nama	: Musringatun
NIM	: 013114757
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Judul Skripsi	: Model *Fixed Effect* pada Analisis Data Pooling

Menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis oleh orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagi persyaratan penyelesaian studi pada universitas lain, kecuali pada bagian-bagian tertentu yang telah dinyatakan dalam teks. Apabila ternyata terbukti hal ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tangggung jawab saya.

Yogyakarta, 2008

Yang menyatakan,

Musringatun
NIM. 013114757

PENGESAHAN

SKRIPSI
Model *Fixed Effect* pada Analisis Data Pooling
Disusun oleh

Musringatun
NIM. 013114757

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji skripsi
Jurusan Pendidikan Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
pada tanggal 2008 dan dinyatakan telah memenuhi syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains.

Tim Penguji

	Nama	Tanda Tangan
Ketua Penguji	Endang Listyani, MS NIP. 131569343	……………..
Sekretaris Penguji	Elly Arliani, M.Si NIP. 131993532	……………..
Penguji I	M.Susanti, M.Si NIP.131808672	……………....
Penguji II	Kismiantini, M.Si NIP.132296139	………………

Yogyakarta, 2008
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Dekan,

Dr. Ariswan
NIP. 130791367

Motto

Maka ni'mat Tuhan kamu yang manakah yang kamu dustakan? Hai jama'ah jin dan manusia, jika kamu sanggup menembus(melintasi) penjuru langit dan bumi, maka lintasilah, kamu tidak dapat menembusnya, melainkan dengan kekuatan.
(Ar Rahman 32-33)

Hanya kepada Engkaulah kami menyembah dan hanya kepadaEngkaulah kami mohon pertolongan. (Al fatikhah:5)

Hidup ini adalah rangkaian pembelajaran
Tanpa batas waktu
Suatu kejadian beralih ke kejadian yang lain
Adalah guru kehidupan yang menukarkan
Hikmah tanpa henti
Tangkaplah setiap tetes hikmah
karena ialah milik kita yang amat berharga
jangan sia-siakan pelajaran yang Alloh berikan
lewati kegagalan dan kesalahan

(Cahyadi T)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah, Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah dan kenikmatan sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Kupersembahkan karya kecil ini untuk:
Bapak, Mama atas cinta, pengorbanan, doa serta kasih sayang yang tulus.
Saudaraku: Moko, Desi, Nur, Janah, Damar, Linda, Putri.

Ucapan thank's to:

- Nini, Pakde Yitno sekeluarga, Wa Simu sekeluarga, Wa Inah sekeluarga, Mas Aris sekeluarga, Nizar sekeluarga, keluarga besar Jati Mulyo, Bi Lah & Bu Ipong sekeluarga.
- Teman-Teman Ulya (Umi, Nurha, Dewi, Anik, Ica, Arna, Nita, Yunan, Alfi, Ihat, Asri, Deedee, Mb Rini), Fatiya, Tasnim, Nadia, TM Munawwar & Adek2 TPA.
- Destri, Dwi, Ida, Asri, Eni, Nurika, Ristina, Noenk, Mien, Siti, Hasti, Reni, Hesti, Didi, Ica, Yuni, Sulis, Yuli, Isti, Anggi, Neli, Lia, Eko, Anggra, Ami, Febi, Audi, Ika terima kasih atas nasihat,doa dan tawaran persahabatannya.
- Murobbi, Guruku dan ikhwafillah terima kasih atas pembelajaran tuk berbagi pada sesama dan pandangan masa depan.
- Teman-teman matematika NR 2001.

Model *Fixed Effect* pada Analisis Data Pooling

Disusun oleh

Musringatun
NIM. 013114757

ABSTRAK

Penulisan ini bertujuan untuk mengestimasi parameter model *fixed effect* pada data pooling serta menerapkan model *fixed effect* pada data pooling.

Data pooling merupakan data gabungan antara data *cross section* dan data *time series*). Data *time series* adalah data yang dikumpulkan dari waktu ke waktu terhadap suatu individu. Sedangkan data *cross section* adalah data yang dikumpulkan dalam satu waktu saja terhadap banyak individu. Salah satu model regresi pada data pooling adalah model *fixed effect* pada data pooling. Bentuk umum model *fixed effect* pada data pooling:

$Y_{it} = \sum_{j=1}^{N} \beta_{1j} D_{jt} + \sum_{k=2}^{K} \beta_k X_{kit} + \varepsilon_{it}$, dengan Y_{it} adalah variabel dependen, X_{kit} adalah variabel independen dan D adalah variabel *dummy*, ε_{it} = *error* untuk individu ke-*i* dan waktu ke-*t* dengan $\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{it}\right) = \mathbf{0}$, $\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{it}{}^2\right) = \sigma_\varepsilon^2$. Pada model *fixed effect* pada data pooling, diasumsikan diasumsikan intersep β_{1i} berbeda antar individu namun intersep antar waktu sama sedangkan *slope* β_k tetap sama antar individu dan antar waktu. Untuk menghitung $\mathbf{b_1}$ dan $\mathbf{b_s}$ digunakan rumus berikut: $\mathbf{b_s} = \left(\mathbf{X'_s}\ \left(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T}\right)\mathbf{X_s}\right)^{-1} \mathbf{X'_s}\ \left(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T}\right)\mathbf{Y}$ dan

$\mathbf{b_{1i}} = \overline{\mathbf{Y_i}} - \overline{\mathbf{X'_i}}\mathbf{b_s}$, $b_s = (b_2 \quad b_3 \quad \cdots \quad b_K)'$. Pengujian hipotesis model *fixed effect* pada data pooling menggunakan uji F.

Penerapan model *fixed effect* dalam skripsi ini adalah investasi (Y_{it}) tiga perusahaan yang dipengaruhi oleh keuntungan perusahaan (X_{2it}) selama sepuluh tahun dengan model *fixed effect* dugaannya:

$\hat{Y}_{it} = -1.5138 D_{1t} + -2.8463 D_{2t} + 0.1137 D_{3t} + 1.1028 X_{2it}$. Model *fixed effect* pada data pooling mampu menjelaskan perbedaaan investasi ketiga perusahaan tersebut. Sedangkan penerapan yang lain adalah mengenai bantuan pembangunan (Y_{it}) di 5 Daerah Tingkat II Propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta yang dipengaruhi Pendapatan Asli Daerah (X_{2it}) dan Subsidi Daerah Otonom (X_{3it}) selama 7 tahun dengan model *fixed effect* dugaannya:

$$Y_{it} = -3103601 D_{1t} - 2742149 D_{2t} - 2549787 D_{3t} - 1628601 D_{4t} - 6448748 D_{5t} - 0.55312 X_{2it} + 2.696397 X_{3it}.$$

Model *fixed effect* pada data pooling mampu menjelaskan perbedaaan bantuan pembangunan untuk Daerah Tingkat II di Propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah dan kenikmatan sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini.

Skripsi ini disusun untuk memenuhi sebagian persyaratan memeperoleh gelar Sarjana Sains Program Studi Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta. Skripsi ini terselesaikan berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Ariswan, selaku Dekan Fakultas MIPA Universitas Negeri Yogyakarta
2. Bapak Dr. Hartono, selaku ketua jurusan Matematika yang telah memberikan kelancaran kelancaran pelayanan dalam urusan akademik
3. Ibu Atmini Dhoruri, M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan kelancaran kelancaran pelayanan dalam urusan akademik
4. Ibu Endang Listyani, M.S, selaku Dosen Pembimbing I dan penasehat akademik yang telah memberikan pengarahan, bimbingan serta nasehat yang diberikan kepada penulis.
5. Ibu Elly Arliani, M.Si, selaku Pembimbing II yang telah memberikan pengarahan, bimbingan serta nasehat yang diberikan kepada penulis.

6. Ibu M. Susanti, M.Si dan Ibu Kismiantini, M.Si, yang telah bersedia menjadi Dosen Penguji skripsi penulis.
7. Bapak dan ibu dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA yang telah memberikan ilmu kepada penulis.
8. Semua pihak yang telah membantu dan memberikan dukungan sehingga dapat memperlancar proses penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih banyak kekurangan, oleh karena itu kritik dan saran yang membangun dari berbagai pihak sangat penulis harapkan. Penulis berharap semoga karya ini dapat bermanfaat bagi dunia pendidikan dan perkembangan ilmu pengetahuan.

Yogyakarta, 2008

Penulis

Musringatun

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai adanya hubungan antara satu variabel dengan variabel lain. Sebagai contoh di bidang ekonomi, adanya penghasilan yang diperoleh berhubungan dengan tingkat pendidikan seseorang, di bidang pertanian, adanya hubungan antara dosis pupuk yang diberikan dengan hasil yang diperoleh. Hubungan antara dua variabel atau lebih umumnya dinyatakan dalam bentuk persamaan matematika yang menyatakan hubungan fungsional antara variabel-variabel. Persamaan ini disebut dengan persamaan regresi. Dalam persamaan regresi dibedakan dua jenis variabel yaitu variabel bebas (independen) dan variabel terikat (dependen).

Regresi pertama kali diperkenalkan oleh Sir Francis Galton pada tahun 1886. Galton menemukan adanya kecenderungan bahwa orang tua yang memiliki tubuh tinggi memiliki anak yang tinggi, orang tua yang pendek memiliki anak-anak yang pendek. Kendati demikian, diamati juga ada kecenderungan tinggi anak cenderung bergerak menuju rata-rata tinggi populasi secara keseluruhan. Dengan kata lain, ketinggian anak yang tinggi atau orang tua yang amat pendek cenderung bergerak ke arah rata-rata tinggi populasi. Inilah yang disebut hukum Galton mengenai regresi universal (Mudrajat Kuncoro, 2001: 91). Sedangkan analisis regresi dalam pengertian modern adalah studi bagaimana variabel dependen dipengaruhi oleh satu atau lebih dari variabel independen dengan tujuan untuk mengestimasi atau memprediksi nilai rata-rata variabel dependen didasarkan pada nilai variabel independen yang diketahui. Keberhasilan dari setiap analisis regresi tergantung dari ada tidaknya ketersediaan data.

Data dapat dibagi menjadi (Supramono, 1993: 10):

1. Menurut sifatnya:
   a. Data kualitatif
   b. Data kuantitatif
2. Menurut sumbernya:
   a. Data internal
   b. Data eksternal
3. Menurut cara memperolehnya:
   a. Data primer
   b. Data sekunder
4. Menurut waktu pengumpulannya:
   a. Data *time series* (data runtut waktu)
   b. Data *cross section* (data seksi silang)

Data yang sering digunakan dalam analisis regresi adalah data *time series* (data runtut waktu) dan data *cross section* (data seksi silang). Data *time series* adalah data yang dikumpulkan dari waktu ke waktu terhadap suatu individu. Sedangkan data *cross section* adalah data yang dikumpulkan dalam satu waktu saja terhadap banyak individu. Namun terkadang ditemukan data yang merupakan gabungan dari data *time series* dan data *cross section*. Gabungan data ini disebut dengan data pooling. Dengan kata lain data pooling adalah data beberapa individu yang pengamatannya dilakukan dari waktu ke waktu, misalnya data pertumbuhan perekonomian propinsi-propinsi di Indonesia. Data ini merupakan kumpulan informasi tentang perkembangan perekonomian di semua propinsi di Indonesia, dan dikumpulkan selama beberapa kurun waktu. Analisis regresi dengan menggunakan data pooling disebut analisis regresi data poling. Untuk selanjutnya analisis regresi data pooling dalam skripsi ini ditulis regresi data pooling.

Data pooling merupakan gabungan data *cross section* dan data *time series* mempunyai observasi lebih banyak dibandingkan dengan data *cross section* atau data *time series* saja. Pada data pooling ini, hasil regresi data pooling cenderung lebih baik dibanding regresi yang hanya menggunakan data *cross section* atau data *time series* saja (Nachrowi, 2006: 312).

Beberapa keuntungan menggunakan data pooling (Indrawati, 2006) :

1. dengan menggabungkan data *cross section* dan data *time series*, data pooling lebih informatif, bervariasi, *degree of freedom* lebih besar dan lebih efisien.
2. dengan menggabungkan data data *cross section* dan data *time series*, data pooling dapat menghindari masalah multikolinearitas.
3. data pooling lebih dapat mendeteksi dan mengukur pengaruh-pengaruh yang tidak dapat diobservasi pada data *cross-section* murni atau *time-series* murni.
4. dengan menggunakan beberapa ribu unit data *cross section* dan data *time series*, data pooling dapat meminimalisasi bias.

Bentuk umum model regresi data pooling adalah

$$Y_{it} = \beta_{1i} + \sum_{k=2}^{K} \beta_k X_{kit} + \varepsilon_{it} \qquad (1.1)$$

t = 1,2…,T i = 1,2…,N k= 2,3…,K

dengan

Y_{it} = variabel terikat untuk unit *cross section* (unit individu) ke-i dan waktu ke-t

X_{kit} = variabel bebas ke-k untuk unit *cross section* ke-i dan waktu ke-t

β_{1i} = intersep untuk unit *cross section* ke-i

β_k = *slope* bersama untuk semua unit

ε_{it} = *error* untuk individu ke-i dan waktu ke-t dengan $\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{it}\right) = \mathbf{0}, \mathbf{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{it}{}^2\right) = \sigma_\varepsilon^2$

Beberapa model regresi pada data pooling menurut Pindyick dan Rubinfield (1998: 202) adalah

1. model dengan menggabungkan data *cross section* dan data *time series*.
2. model *fixed effect* / model kovarian / pendekatan *Least Square Dummy Variable*. Model ini menambahkan variabel *dummy* untuk mengetahui variabel yang menyebabkan perbedaan intersep antar unit individu.
3. model *random effect / error component model*. Model ini menghitung faktor error (*error term*) yang menimbulkan korelasi antar unit waktu dan unit individu.

Estimasi parameter model regresi data dengan menggabungkan data *cross section* dan data *time series* digunakan metode kuadrat terkecil. Pada model ini tidak dapat diketahui perbedaan intersep dan *slope* baik antar waktu maupun antar individu. Salah satu metode untuk mengatasi permasalahan tersebut dengan menggunakan model *fixed effect* data pooling. Model *fixed effect* pada data pooling adalah model regresi data pooling dengan menggunakan variabel *dummy* untuk menjelaskan adanya perbedaan intersep antar individu. Parameter model *fixed effect* pada data pooling diestimasi dengan menggunakan metode kuadrat terkecil. Oleh karena itu model *fixed effect* disebut juga pendekatan *Least Square Dummy Variable*. Salah satu kelebihan dari model *fixed effect* pada data pooling adalah dapat mengetahui adanya perbedaan karakteristik dalam setiap individu. Sebagai contoh karakteristik dalam hal ini pada perusahaan adalah budaya perusahaan, gaya manajerial.

B. Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang dapat disusun adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mengestimasi parameter-parameter model *fixed effect* pada data pooling?
2. Bagaimana penerapan model *fixed effect* pada data pooling?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah:

1. Menjelaskan langkah-langkah mengestimasi parameter-parameter model *fixed effect* pada data pooling.
2. Menjelaskan penerapan model *fixed effect* pada data pooling.

D. Manfaat Penulisan

Manfaat yang diperoleh dari penulisan ini antara lain:

1. Memberikan gambaran dan penjelasan konsep dasar model *fixed effect* data pooling yang sering ditemui dalam observasi.
2. Dapat menerapkan model *fixed effect* pada data pooling di bidang ekonomi.

BAB II

DASAR TEORI

Pada bab II pada model *fixed effect* pada data pooling ini memerlukan beberapa teori tentang matriks, regresi linier ganda dan variabel *dummy* sebagai landasan dalam pembahasan model *fixed effect* pada data pooling.

A. Matriks

Pada skripsi ini model regresi linier dituliskan dalam notasi matriks. Matriks memberikan metode yang ringkas untuk menyelesaikan model regresi yang terdiri dari banyak variabel.

Definisi 2.1 Matriks (Anton, 1987: 22)

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2 Transpos suatu matriks (Searle, 1982: 23)

Transpos suatu matriks adalah matriks yang dibentuk dari matriks semula dengan mengubah entri-entri baris menjadi entri-entri kolom dan entri-entri kolom menjadi entri-entri baris. Transpos suatu matriks biasanya dituliskan dengan tanda $(\,'\,)$ pada notasi matriks aslinya.

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 18 & 17 & 11 \\ 19 & 13 & 6 \\ 6 & 14 & 9 \\ 9 & 11 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 18 & 19 & 6 & 9 \\ 17 & 13 & 14 & 11 \\ 11 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat transpos suatu matriks (Anton, 1987: 37) :

1. $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$
3. $(\mathbf{kA})' = \mathbf{k}\ \mathbf{A}'$, dengan k adalah sebarang skalar.
4. $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\ \mathbf{A}'$

Definisi 2.3 Matriks Persegi (Dumairy, 1999: 292)

Matriks persegi adalah matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom.

Contoh:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4 Matriks Diagonal (Dumairy, 1999: 300)

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua entrinya nol kecuali pada diagonal utamanya.

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.5 Matriks Identitas (Anton, 1987: 33)

Matriks identitas adalah matriks persegi yang semua entri pada diagonal utamanya adalah bilangan satu sedangkan entri yang lain bilangan nol. Matriks identitas berukuran $n \times n$ biasa dinyatakan dengan $\mathbf{I_n}$.

Contoh:

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.6 Matriks Skalar (Dumairy, 1999: 303)

Matriks skalar adalah matriks diagonal yang entri-entrinya sama atau seragam (λ). Apabila $\lambda = 1$ matriks skalar menjadi matriks identitas.

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.7 Matriks Simetris (Dumairy, 1999: 302)

Matriks simetris adalah matriks persegi yang sama dengan transposnya. Matriks **A** dikatakan simetris apabila $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$.

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Apabila sebuah matriks simetris dikalikan dengan matriks transposnya hasilnya berupa kuadrat dari matriks tersebut yaitu $\mathbf{AA}' = \mathbf{AA} = \mathbf{A}^2$.

Definisi 2.8 Invers suatu Matriks (Anton, 1987: 34)

Jika **A** dan **B** adalah matriks-matriks persegi, sedemikian sehingga $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, maka **A** dikatakan mempunyai invers dan **B** disebut invers **A** dan dinotasikan $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Sifat invers suatu matriks (Anton, 1987: 37):

1. jika **B** dan **C** invers suatu matriks **A** maka $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.
2. Jika **A** dan **B** adalah matriks-matriks yang mempunyai invers dan berordo sama , maka
   a. **AB** mempunyai invers
   b. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$
   c. $\left(\mathbf{AB}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$)
   d. $\left(\mathbf{A}^{n}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{n}$ untuk n = 0,1,2...N

Untuk sebarang skalar $k \neq 0$ maka $\left(k\mathbf{A}\right)^{-1} = \dfrac{1}{k}\ \mathbf{A}^{-1}$

Definisi 2.9 Determinan (Dumairy, 1999: 313)

Setiap matriks persegi **A,** selalu ada suatu skalar yang disebut determinan matriks **A** dengan simbol det(A) atau $|A|$.

Nilai dari suatu determinan dapat dilakukan dengan cara mengalikan unsur-unsurnya secara diagonal.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{determinannya adalah } \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \ \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 24 = 4$$

Matriks berdimensi tiga:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

determinan **A** adalah

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13}$$
$$- a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.8.4 - 7.5.3 - 4.2.9 - 1.6.7 = 0$$

Sifat-sifat determinan (Anton, 1987: 71-75):

a. Jika **A** adalah sebarang matriks persegi, maka det(**A**) = $\det(\mathbf{A}')$

b. Jika **A** dan **B** adalah matriks-martiks persegi yang ordonya sama, maka det(**AB**) = det(**A**)det(**B**)

c. Sebuah matriks persegi **A** mempunyai invers jika dan hanya jika $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

d. Jika A mempunyai invers maka $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}$

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/9 & 2/9 \\ 4/27 & 1/27 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.10 *Trace* suatu Matriks (Searle, 1982: 27)

Trace suatu matriks persegi **A** berordo *n* adalah jumlah *n* elemen diagonal utama matriks tersebut, ditulis:

$$tr\ (\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \quad \text{dengan i = j}$$

Contoh :

$$tr \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 8 & 3 & 9 \\ 4 & -2 & -8 \end{bmatrix} = 1 + 3 - 8 = -4$$

Beberapa hal yang berlaku (Intriligator, 1978: 579):

1. $tr(\mathbf{A}') = tr(\mathbf{A})$
2. $tr(c) = c$, c adalah skalar
3. $tr(c\mathbf{A}) = c\ [tr(\mathbf{A})]$
4. $tr(\mathbf{I_n}) =$ n
5. $tr(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B})$
6. Apabila **AB = BA**, maka $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$

Definisi 2.11 Matriks Nol (Dumairy, 1999: 301)

Matriks nol adalah matriks yang semua entri-entrinya nol.

Contoh:

$$\mathbf{0}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.12 Matriks Idempoten (Maddala, 1977: 445)

Matriks **A** adalah matriks idempoten jika dan hanya jika $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$

Definisi 2.13 *Kronecker Product* (Muirhead, 2005: 73)

Jika **A** adalah matriks dengan ukuran $n \times m$ dan **B** adalah matriks dengan ukuran $k \times l$ maka Kronecker Product dari **A** dan **B** adalah

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1N}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2N}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{M1}\mathbf{B} & a_{M2}\mathbf{B} & \cdots & a_{MN}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

dengan $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ adalah matriks dengan ukuran $mk \times nl$.

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Untuk *kronecker product* **A** dan **B** adalah

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} & 3\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ 2\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 9 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} \otimes \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ 1\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat dari *Kronecker Product* adalah

1. $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$
3. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$
4. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}'$
5. $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C}$

Definisi 2.14 Vektor dan matriks dengan semua elemen 1 (Neter, 1985: 198)

Vektor kolom dengan semua elemen 1 ditulis dengan

$$\underset{\mathbf{r \times 1}}{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan matriks persegi yang semua elemennya 1 dapat ditulis dengan

$$\underset{\mathbf{r \times r}}{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$\underset{\mathbf{3 \times 1}}{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underset{\mathbf{3 \times 3}}{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk vektor 1 berukuran $n \times 1$,

$$\underset{1\times 1}{\mathbf{1}'\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = [n] = n$$

$$\underset{n\times n}{\mathbf{1}\mathbf{1}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \underset{n\times n}{\mathbf{J}}$$

B. Model Regresi Linier Ganda

Secara umum model regresi linier ganda (Judge, 1988: 926) dapat ditulis:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i \quad i = 1,2,...n$$

dengan

β_1 = intersep

$\beta_2, \beta_{3.} ..., \beta_k$ = *slope*

ε_i = *error*, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

i = observasi (pengamatan) ke-i

n = banyaknya observasi

Oleh karena *i* menunjukkan observasi maka terdapat *n* persamaan:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \cdots + \beta_k X_{k1} + \varepsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \cdots + \beta_k X_{k2} + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ Y_n &= \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \cdots + \beta_k X_{kn} + \varepsilon_n \end{aligned}$$

Model regresi dapat ditulis dalam matriks sebagai berikut :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dengan

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix}$$

Beberapa asumsi yang penting dalam regresi linier ganda (Widarjono, 2005: 78) antara lain :

1. Hubungan antara Y (variabel dependen) dan X (variabel independen) adalah linier dalam parameter.
2. Tidak ada hubungan linier antara variabel independen atau tidak ada multikolinieritas antara varibel independen.
3. Nilai rata-rata dari ε adalah nol.

   $\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \mathbf{0}$,

   Dalam bentuk matriks:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2) \\ \vdots \\ E(\varepsilon_i) \\ \vdots \\ E(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \text{ = vektor nol}$$

4. Tidak ada korelasi antara (ε_i) dan (ε_j). $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$, i$\neq$j,
5. Variansi setiap ε adalah sama (homoskedastisitas)

   $\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^2\right) = \sigma_\varepsilon^{\ 2}$

   Apabila ditulis dalam bentuk matriks:

$$E\left(\boldsymbol{\varepsilon}^2\right) = E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = E\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n\end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E\left(\varepsilon_1^2\right) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E\left(\varepsilon_2^2\right) & \cdots & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(\varepsilon_i\varepsilon_1) & E(\varepsilon_i\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_i\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\varepsilon_2) & \cdots & E\left(\varepsilon_n^2\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^{\ 2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^{\ 2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_\varepsilon^{\ 2} & \cdots & 0 \\ \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sigma_\varepsilon^{\ 2} \end{bmatrix} = \sigma_\varepsilon^{\ 2} I_n$$

1. Estimasi Parameter

Persamaan regresi linier ganda dugaan (Makridakis, 1999: 282)

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_{2i} + b_3 X_{3i} + \cdots + b_k X_{ki}$$

Persamaan regresi linier ganda dugaan ditulis dalam matriks sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Xb}$$

dengan

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix}\hat{Y}_1\\ \hat{Y}_2\\ \vdots\\ \hat{Y}_i\\ \vdots\\ \hat{Y}_n\end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_i\\ \vdots\\ b_k\end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix}$$

Salah satu cara yang digunakan untuk mengestimasi $\boldsymbol{\beta}$ adalah metode kuadrat terkecil. Metode kuadrat terkecil adalah suatu metode untuk menghitung **b** sebagai estimator $\boldsymbol{\beta}$ dengan meminimalkan jumlah variabel *error* (Widarjono, 2005: 32). Misalkan **b** sebagai estimator $\boldsymbol{\beta}$ dan persaman hasil estimasi adalah

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Xb}$$

dan

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$$

Selanjutnya

$$\mathbf{e'e} = (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})'(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})$$

$$\mathbf{e'e} = (\mathbf{Y} - \mathbf{Xb})'(\mathbf{Y} - \mathbf{Xb})$$

$$\mathbf{e'e} = (\mathbf{Y'} - \mathbf{b'X'})(\mathbf{Y} - \mathbf{Xb})$$

$$\mathbf{e'e} = \mathbf{Y'Y} - \mathbf{Y'Xb} - \mathbf{b'X'Y} + \mathbf{b'X'Xb}$$

Oleh karena $\mathbf{b'X'Y}$ adalah suatu matriks skalar maka matriks transposnya adalah

$\mathbf{b'X'Y} = \mathbf{Y'Xb}$ sehingga

$$\mathbf{e'e} = \mathbf{Y'Y} - 2\mathbf{b'X'Y} + \mathbf{b'X'Xb}$$

Di dalam matematika**,** untuk mendapatkan nilai minimal dalam sebuah fungsi syaratnya turunan pertama dari fungsi tersebut sama dengan nol. Oleh karena itu untuk mendapatkan $\sum \mathbf{e}_i^2$ sekecil mungkin adalah dengan cara melakukan penurunan $\sum \mathbf{e}_i^2$ terhadap komponen **b** dapat ditulis $\dfrac{\partial \sum \mathbf{e}_i^2}{\partial\, \mathbf{b}} = \mathbf{0}$.

Selanjutnya akan diminimalkan $\sum \mathbf{e}_i^2 = \mathbf{e'e} = (\mathbf{Y} - \mathbf{Xb})'(\mathbf{Y} - \mathbf{Xb})$ dengan

$\sum \mathbf{e}_i^2$ diturunkan terhadap komponen **b**:

$$\frac{\partial\,\mathbf{e}'\mathbf{e}}{\partial\,\mathbf{b}} = -2\mathbf{X}'\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b} \text{ dengan } \mathbf{e}'\mathbf{e} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b}$$

$$2\mathbf{X}'\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ atau}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

Teorema 3.1 Gauss Markov (Widarjono, 2005: 36)

Metode Kuadrat Terkecil menghasilkan estimator parameter yang bersifat *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE) yaitu linier, tidak bias, dan memiliki variansi minimum.

Akan dibuktikan **b** merupakan estimator yang linier, tidak bias, memiliki variansi yang minimum.

a. Linier

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon})$$

$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$= \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} \text{ karena } (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X} = \mathbf{I}$$

Persamaan diatas menunjukan **b** adalah fungsi linier dari $\boldsymbol{\beta}$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}$.

b. Tidak Bias

$$\mathbf{E}(\mathbf{b}) = \mathbf{E}\left[\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\right]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{b}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{E}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$= \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

$= \boldsymbol{\beta}$, sebab **X**= konstan dan $\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$

Terbukti bahwa **b** merupakan estimator kuadrat terkecil yang tidak bias.

c. Memiliki variansi yang minimum

Diketahui

$$\mathbf{Var(b)} = \mathbf{E}\left[(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})^2\right]$$

atau

$$\mathbf{Var(b)} = \mathbf{E}\left[(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})'\right]$$

Dengan mensubstitusikan $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}$ untuk $(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})$ maka akan diperoleh

$$\mathbf{Var(b)} = \mathbf{E}\left[\left\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\right\}\left\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\right\}'\right]$$

$$\mathbf{Var(b)} = \mathbf{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{X}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]$$

$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\mathbf{X}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\,\mathbf{I}_n\,\mathbf{X}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$= \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$= \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$\mathbf{Var(b)} = \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

Untuk menunjukkan bahwa semua **b** adalah estimator-estimator terbaik, akan dibuktikan bahwa variansi yang diperoleh yaitu $\mathbf{Var(b)} = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{2}}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ adalah terkecil diantara semua variansi estimator lain yang mungkin linear dan tidak bias, yaitu dengan mengasumsikan sebuah estimator alternatif yang linear dan tidak bias, dan akan dibuktikan bahwa variansinya lebih besar daripada variansi estimator model regresi.

Misalkan b* adalah estimator alternatif yang linear dan tidak bias bagi $\boldsymbol{\beta}$. Anggaplah $\mathbf{b^*} = \left[(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B} \right]\mathbf{Y}$ dengan $\mathbf{B}$ adalah matriks konstanta berukuran k×n yang diketahui.

Diperoleh

$$\mathbf{b^*} = \left[(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B} \right]\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{b^*} = \left[(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B} \right]\left[\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \right]$$

$$\mathbf{b^*} = \left[(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X}' \left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \right) + \mathbf{B}\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \right) \right]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{b^*}) = \mathbf{E}\left[(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X}' \left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \right) + \mathbf{B}\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \right) \right]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{b^*}) = \mathbf{E}\left[(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{X'X} \right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{B}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} \right] \quad \text{dengan}$$

$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X} = \mathbf{I}$, $\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{b^*} \right) = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{BX}\boldsymbol{\beta}$$

Dari persamaan diatas diasumsikan b* merupakan estimator yang tidak bias bagi $\boldsymbol{\beta}$ maka seharusnya $\mathbf{E}\left(\mathbf{b^*} \right) = \boldsymbol{\beta}$ atau $\mathbf{BX}\boldsymbol{\beta}$ merupakan matriks nol dengan $\mathbf{BX} = 0$.

Variansi dari estimator alternatif adalah

$$\mathbf{Var(b^*)} = \mathbf{E}\left[(\mathbf{b^*} - \boldsymbol{\beta})(\mathbf{b^*} - \boldsymbol{\beta})' \right]$$

$$= E\left[\left\{ \left[(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B} \right]\mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta} \right\} \left\{ \left[(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B} \right]\mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta} \right\}' \right]$$

$$= E\left[\left\{\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B}\right](\mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\beta}\right\}\left\{\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B}\right](\mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\beta}\right\}'\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\left\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{BX\beta} + \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}\right\}\left\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X\beta} + \right.\right.$$

$$\left.\left.(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{BX\beta} + \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}\right\}'\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\left\{\mathbf{I\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}\right\}\left\{\mathbf{I\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}\right\}'\right]$$

Karena $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X} = \mathbf{I}, \mathbf{BX} = \mathbf{0}$

$$= \mathbf{E}\left[\left\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}\right\}\left\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}\right\}'\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\left\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}\right\}\left\{\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{B}'\right\}\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\left\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B}\right\}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\left\{\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \mathbf{B}'\right\}\right]$$

$$= \left[\left\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B}\right\}E\left[\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\right]\left\{\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \mathbf{B}'\right\}\right]$$

$$= \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{2}}\mathbf{I}_n\left\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B}\right\}\left\{\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \mathbf{B}'\right\}$$

$$= \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{2}}\mathbf{I}_n\left\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \mathbf{BX}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{B}' + \mathbf{BB}\right\}$$

$$= \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{2}}\mathbf{I}_n\left\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \mathbf{BB}'\right\} \text{ karena } \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$$

$$= \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{2}}\mathbf{I}_n(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{2}}\mathbf{I}_n\mathbf{BB}'$$

$\mathbf{Var}(\mathbf{b}^*)$ lebih besar daripada $\mathbf{Var}(\mathbf{b})$ yaitu dengan kelebihan sebesar $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{2}}\mathbf{I}_n\mathbf{BB}'$, sehingga terbukti bahwa **b** merupakan estimator terbaik.

2. Estimasi Variansi

Menurut Judge *et al*. (1988: 205), estimator yang tidak bias untuk $\sigma_\varepsilon^{\ 2}$ adalah $\hat{\sigma}_\varepsilon^{\ 2}$ dengan

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_\varepsilon^{\ \mathbf{2}} = \frac{e'e}{n-k}$$

Pembuktian

Model regresi linier ganda ditulis dalam persamaan matriks :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

akan digunakan sebagai dasar mengestimasi $\sigma_\varepsilon^{\ 2}$ dengan $\sigma_\varepsilon^{\ 2}$ adalah variansi dari *error*.

Misalkan **b** sebagai estimator $\boldsymbol{\beta}$ dan persaman hasil estimasi adalah

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{Y}} &= \mathbf{Xb} \\ &= \mathbf{X}\left(\mathbf{X'X}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{X'Y}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} \\ &= \mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X'Y} \\ &= \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X'}\right)\mathbf{Y} \\ &= \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X'}\right)\left(\mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}\right) \\ &= \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{X}\left(\mathbf{X'X}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{X'}\right)\boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}$$

M adalah matriks ukuran $n \times n$ dan simetris.

$$\mathbf{MM'} = \mathbf{MM} = \mathbf{M}^2 = \mathbf{M}$$

$$= \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{X}\,(\,\mathbf{X'X}\,)^{-1}\mathbf{X'}\,\right)\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{X}\,(\,\mathbf{X'X}\,)^{-1}\mathbf{X'}\,\right) = \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{X}\,(\,\mathbf{X'X}\,)^{-1}\mathbf{X'}\,\right)$$

Matriks yang memenuhi sifat di atas disebut matriks idempoten.

$$\mathbf{e'e} = \boldsymbol{\varepsilon}'\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{X}\,(\,\mathbf{X'X}\,)^{-1}\mathbf{X'}\right)\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{X}\,(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\right)\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{M'M}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon}\left(\,\mathbf{I}_n - \mathbf{X}\,(\,\mathbf{X'X}\,)^{-1}\mathbf{X'}\right)\boldsymbol{\varepsilon}$$

Karena $\boldsymbol{\varepsilon}'\,\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah skalar maka

$$\mathbf{E}\,[\mathbf{e'e}\,] = \mathbf{E}\,[\mathbf{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}\,)\,] = \mathbf{E}\,[\mathbf{tr}\,(\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')\,]$$

$$\mathbf{E}[\,\mathbf{e'e}\,] = \mathbf{tr}\{\,\mathbf{M}\;\mathbf{E}\,[\,\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\,]\,\} = \mathbf{tr}\left[\,\mathbf{M}\,\left(\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^{\,2}\mathbf{I}_n\right)\,\right] = \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^{\,2}\mathbf{tr}\,(\mathbf{M})$$

$$= \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^{\,2}\mathbf{tr}\left[\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\right]$$

$$= \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^{\,2}\left[\,\mathbf{tr}(\mathbf{I}_n) - \mathbf{tr}\,\left(\mathbf{X}\,(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\right)\,\right]$$

$$= \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^{\,2}\left[\,\mathbf{tr}\,(\mathbf{I}_n) - \mathbf{tr}\,\left(\mathbf{X'X}\,(\mathbf{X'X})^{-1}\right)\,\right] \text{ karena } (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'X} = \mathbf{I}$$

$$= \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^{\,2}[\mathbf{tr}(\mathbf{I}_n) - \mathbf{tr}(\mathbf{I}_\mathbf{k})]$$

$$= \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^{\,2}\,(\,n-k\,)$$

$$\mathbf{E}[\,\mathbf{e'e}\,] = \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^{\,2}\,(n-k\,)$$

Akibatnya $\mathbf{E}\left[\dfrac{\mathbf{e'e}}{n-k}\right] = \left(\dfrac{\mathbf{1}}{n-k}\right)\boldsymbol{\sigma}^2(n-k) = \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^{\,2}$

Untuk $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_\varepsilon^{\,2} = \dfrac{e'e}{n-k}$ maka $\mathbf{E}\left[\,\hat{\sigma}_\varepsilon^2\right] = \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^{\,2}$

Jadi $\hat{\sigma}_\varepsilon^{\,2}$ merupakan estimator yang tidak bias untuk $\sigma_\varepsilon^{\,2}$.

3. **Matrik Variansi Kovariansi b**

Definisi 2.15 Matrik Variansi-Kovariansi dari b (Gujarati, 1978: 137).

$$\text{Var-cov}\,(\mathbf{b}) = E\left\{[\mathbf{b} - E(\mathbf{b})][\mathbf{b} - E(\mathbf{b})]'\right\}$$

Diketahui $E(\mathbf{b}) = \boldsymbol{\beta}$ sehingga

$$E\left\{[\mathbf{b} - E(\mathbf{b})][\mathbf{b} - E(\mathbf{b})]'\right\} = E\left\{[\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}][\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}]'\right\}$$

$$= E\left\{\begin{bmatrix} b_1 - \beta_1 \\ b_2 - \beta_2 \\ \vdots \\ b_k - \beta_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 - \beta_1 \\ b_2 - \beta_2 \\ \vdots \\ b_k - \beta_k \end{bmatrix}'\right\}$$

$$= E\left\{\begin{bmatrix} b_1 - \beta_1 \\ b_2 - \beta_2 \\ \vdots \\ b_k - \beta_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 - \beta_1 & b_2 - \beta_2 & \cdots & b_k - \beta_k \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} E\left[(b_1 - \beta_1)^2\right] & E\left[(b_1 - \beta_1)(b_2 - \beta_2)\right] & \cdots & E\left[(b_1 - \beta_1)(b_k - \beta_k)\right] \\ E\left[(b_2 - \beta_2)(b_1 - \beta_2)\right] & E\left[(b_2 - \beta_2)^2\right] & \cdots & E\left[(b_2 - \beta_2)(b_k - \beta_k)\right] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E\left[(b_k - \beta_k)(b_1 - \beta_k)\right] & E\left[(b_k - \beta_k)(b_2 - \beta_2)\right] & \cdots & E\left[(b_k - \beta_k)^2\right] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Var(b_1) & \text{cov}(b_1, b_2) & \cdots & \text{cov}(b_1, b_k) \\ \text{cov}(b_2, b_1) & Var(b_2) & \cdots & \text{cov}(b_2, b_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{cov}(b_k, b_1) & \text{cov}(b_k, b_2) & \cdots & Var(b_k) \end{bmatrix}$$

Matriks diatas adalah matriks simetris yang mengandung variansi dari estimator b di sepanjang diagonal utama dan kovariansi pada elemen yang lain. Oleh karena itu matriks ini disebut matriks variansi-kovariansi dari estimator kuadrat terkecil *slope* regresi. Dengan demikian maka:

$$\text{Var-cov}(\mathbf{b}) = E\left\{ (\mathbf{b}-\boldsymbol{\beta})(\mathbf{b}-\boldsymbol{\beta})' \right\}$$

Dengan mensubstitusikan $\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}$ untuk $(\mathbf{b}-\boldsymbol{\beta})$ maka akan diperoleh

$$\text{Var-cov }(\mathbf{b}) = \mathbf{E}\left[\left\{ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} \right\}\left\{ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} \right\}' \right]$$

$$= \mathbf{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{X}\ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \right]$$

$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\ \mathbf{X}'\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\,\mathbf{I}_{n}\ \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$= \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}^{\mathbf{2}}\ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$= \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$\text{Var-cov }(\mathbf{b}) = \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}^{2}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

C. Variabel *Dummy* (Sumodiningrat, 1996: 345)

Variabel *dummy* adalah variabel kualitatif dalam model regresi. Variabel kualitatif tidak dapat diukur, tetapi hanya dapat ditandai sifatnya antara ada dan tidak ada. Nilai variabel *dummy* dalam model bernilai 1 atau 0 untuk masing-masing kategori. Misalkan untuk kategori jenis kelamin pria adalah 1 dan untuk kategori jenis kelamin wanita adalah 0.

BAB III

PEMBAHASAN

Data pooling adalah data beberapa individu yang pengamatannya dilakukan dari waktu ke waktu. Regresi dengan menggunakan data pooling disebut regresi data poling.

Bentuk umum model regresi data pooling adalah

$$Y_{it} = \beta_{1i} + \sum_{k=2}^{K} \beta_k X_{kit} + \varepsilon_{it} \qquad (3.1)$$

t = 1,2…T ; i = 1,2…N; k = 2,3…K

dengan:

Y_{it} = variabel terikat untuk unit *cross section* (unit individu) ke-*i* dan waktu ke-*t*
X_{kit} = variabel bebas ke-k untuk unit *cross section* ke-*i* dan waktu ke-*t*
β_{1i} = intersep untuk unit *cross section* ke-*i*
β_k = *slope* bersama untuk semua unit
ε_{it} = *error* untuk individu ke-*i* dan waktu ke-*t* dengan
$\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{it}\right) = \mathbf{0}, \mathbf{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{it}{}^2\right) = \sigma_\varepsilon^2$

A. Model *Fixed Effect* Pada Data Pooling

Model *fixed effect* pada data pooling adalah model regresi data pooling dengan menggunakan variabel *dummy* yang digunakan untuk menjelaskan adanya perbedaan intersep antar individu. Sebagai contoh perbedaan intersep antar individu, perbedaan karakteristik pada perusahaan budaya perusahaan adalah gaya manajerial. Model *fixed effect* pada data pooling dapat dituliskan dalam bentuk berikut ini:

$$Y_{it} = \sum_{j=1}^{N} \beta_{1j} D_{jt} + \sum_{k=2}^{K} \beta_k X_{kit} + \varepsilon_{it} \quad (3.2)$$

dengan D_{jt} adalah variabel *dummy* dan mengambil nilai 0 atau 1. Dapat juga ditulis berikut ini:

$$\mathrm{D_{jt}} = \begin{cases} 1 & jika\ j = i \\ 0 & jika\ \ j \neq i \end{cases}$$

Jadi variabel *dummy* akan bernilai 1 untuk observasi yang sama dengan individu ke- j dan bernilai 0 untuk observasi individu yang lain. Pada model *fixed effect* untuk data pooling, diasumsikan bahwa intersep β_{1i} berbeda antar individu namun intersep antar waktu sama sedangkan *slope* β_k tetap sama antar individu dan antar waktu. Model *fixed effect* pada data pooling terdapat N persamaan dengan masing-masing T observasi dapat dituliskan berikut ini:

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= \sum_{j=1}^{N} \beta_{1j} D_{jt} + \sum_{k=2}^{K} \beta_k X_{k1t} + \varepsilon_{1t} \\ Y_{2t} &= \sum_{j=1}^{N} \beta_{1j} D_{jt} + \sum_{k=2}^{K} \beta_k X_{k2t} + \varepsilon_{2t} \\ &\vdots \\ Y_{Nt} &= \sum_{j=1}^{N} \beta_{1j} D_{jt} + \sum_{k=2}^{K} \beta_k X_{kNt} + \varepsilon_{Nt} \end{aligned}$$

Untuk i = 1 dan t = 1,2,...,T, model *fixed effect* pada persamaan (3.2) dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut ini:

$$\underset{(T \times 1)}{\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ \\ Y_{1T} \end{bmatrix}} = \underset{(T \times N)}{\begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & \cdots & D_{N1} \\ D_{12} & D_{22} & \cdots & D_{N2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{1T} & D_{2T} & \cdots & D_{NT} \end{bmatrix}} \underset{(N \times 1)}{\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \\ \beta_{1N} \end{bmatrix}} + \underset{(T \times K)}{\begin{bmatrix} X_{211} & X_{311} & \cdots & X_{K11} \\ X_{212} & X_{312} & \cdots & X_{K12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{21T} & X_{31T} & \cdots & X_{K1T} \end{bmatrix}} \underset{(K \times 1)}{\begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix}} + \underset{(T \times 1)}{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1T} \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ \vdots \\ Y_{1T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \\ \beta_{1N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{211} & X_{311} & \cdots & X_{K11} \\ X_{212} & X_{312} & \cdots & X_{K12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{21T} & X_{31T} & \cdots & X_{K1T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1T} \end{bmatrix}$$

Dimisalkan $\mathbf{j_T} = (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)'$ adalah vektor matriks berukuran $(T \times 1)$ maka untuk individu ke-1 persamaan (3.2) dapat ditulis dengan notasi matriks berikut ini:

$$\mathbf{Y_{1t}} = \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{11}} \mathbf{j_T} + \mathbf{X_{k1t}} \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{k}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{1t}}$$

Untuk i = 2 dan t = 1,2,...,T, model *fixed effect* pada persamaan (3.2) dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut ini:

$$\begin{bmatrix} Y_{21} \\ Y_{22} \\ \vdots \\ Y_{2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & \cdots & D_{N1} \\ D_{12} & D_{22} & \cdots & D_{N2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{1T} & D_{2T} & \cdots & D_{NT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{221} & X_{321} & \cdots & X_{K21} \\ X_{222} & X_{322} & \cdots & X_{K22} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{22T} & X_{32T} & \cdots & X_{K2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{21} \\ Y_{22} \\ \vdots \\ Y_{2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{221} & X_{321} & \cdots & X_{K21} \\ X_{222} & X_{322} & \cdots & X_{K22} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{22T} & X_{32T} & \cdots & X_{K2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2T} \end{bmatrix}$$

Dimisalkan $\mathbf{j_T} = (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)'$ adalah vektor matriks berukuran $(T \times 1)$ maka untuk individu ke-2 persamaan (3.2) dapat ditulis dengan notasi matriks berikut ini:

$$\mathbf{Y_{2t}} = \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{12}} \mathbf{j_T} + \mathbf{X_{k2t}} \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{k}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{2t}}$$

Untuk i = N dan t = 1,2,...,T, model *fixed effect* pada persamaan (3.2) dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut ini:

$$\begin{bmatrix} Y_{N1} \\ Y_{N2} \\ \vdots \\ Y_{NT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & \cdots & D_{N1} \\ D_{12} & D_{22} & \cdots & D_{N2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{1T} & D_{2T} & \cdots & D_{NT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{2N1} & X_{3N1} & \cdots & X_{KN1} \\ X_{2N2} & X_{3N2} & \cdots & X_{KN2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{2NT} & X_{3NT} & \cdots & X_{KNT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{N1} \\ \varepsilon_{N2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{NT} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{N1} \\ Y_{N2} \\ \vdots \\ Y_{NT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{2N1} & X_{3N1} & \cdots & X_{KN1} \\ X_{2N2} & X_{3N2} & \cdots & X_{KN2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{2NT} & X_{3NT} & \cdots & X_{KNT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{N1} \\ \varepsilon_{N2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{NT} \end{bmatrix}$$

Dimisalkan $\mathbf{j_T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}'$ adalah vektor matriks berukuran $(T \times 1)$ maka untuk individu ke-*N*, persamaan (3.2) dapat ditulis dengan notasi matriks berikut ini:

$$\mathbf{Y}_{N\mathbf{t}} = \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1}N}\mathbf{j_T} + \mathbf{X}_{\mathbf{k}N\mathbf{t}}\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{k}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{N\mathbf{t}}$$

Untuk i = 1,2...N dan t = 1,2,...,T, persamaan (3.2) dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut ini:

$$\mathbf{Y_i} = \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1i}}\mathbf{j_T} + \mathbf{X_{si}}\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{i}} \text{ dengan i= 1,2...}N \qquad (3.3)$$

dengan

$$\mathbf{Y_i} = \begin{bmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ \vdots \\ Y_{iT} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X_{si}} = \begin{bmatrix} X_{2i1} & X_{3i1} & \cdots & X_{Ki1} \\ X_{2i2} & X_{3i2} & \cdots & X_{Ki2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{2iT} & X_{3iT} & \cdots & X_{KiT} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{iT} \end{bmatrix}$$

dan

$$\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{s}} = (\beta_2 \quad \beta_3 \quad \cdots \quad \beta_K)'.$$

Secara lengkap *NT* observasi dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & j_T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & j_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{s1} \\ X_{s2} \\ \vdots \\ X_{sN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_T & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{X_{s1}} \\ 0 & j_T & \cdots & 0 & \mathbf{X_{s2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & j_T & \mathbf{X_{s}}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1N} \\ \boldsymbol{\beta_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

dengan menggunakan notasi *Kronecker product* akan ekivalen dengan

$$\mathbf{Y} = \left[\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T} \quad \mathbf{X_s}\right] \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta_1} \\ \boldsymbol{\beta_s} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.5}$$

dengan

$\mathbf{Y}' = \mathbf{Y}_1', \mathbf{Y}_2', \cdots, \mathbf{Y}_N'$,

$\mathbf{X}_s' = \left(\mathbf{X}_{s1}', \mathbf{X}_{s2}', \ldots, \mathbf{X}_{sN}' \right)$

$\boldsymbol{\varepsilon}' = \left(\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_N' \right)$,

$\boldsymbol{\beta}_1' = \left(\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{1N} \right)$ dan

$\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T}$ adalah matriks dari variabel *dummy* berukuran (NT x N).

$$\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T} = \begin{bmatrix} j_T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & j_T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & j_T \end{bmatrix}$$

1. Estimasi Parameter

Model *fixed effect* pada data pooling dalam bentuk matriks dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{Y} = \left[\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T} \quad \mathbf{X_s}\right] \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta_1} \\ \boldsymbol{\beta_s} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Misalkan **b** sebagai estimator $\boldsymbol{\beta}$ dan persamaan model *fixed effect* pada data pooling dugaan adalah

$$\hat{\mathbf{Y}} = \left[\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T} \quad \mathbf{X_s}\right] \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_s} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Estimasi parameter dengan menggunakan metode kuadrat terkecil adalah

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

Apabila $\mathbf{X} = [\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T} \quad \mathbf{X_s}]$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_s} \end{bmatrix}$ maka $\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_s} \end{bmatrix} = \left((\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T} \quad \mathbf{X_s})' (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T} \quad \mathbf{X_s}) \right)^{-1} (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T} \quad \mathbf{X_s})' \mathbf{Y}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_s} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T})' \\ \mathbf{X_s}' \end{bmatrix} (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T} \quad \mathbf{X_s}) \right)^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T})' \\ \mathbf{X_s}' \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T})'(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T}) & (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T})'\mathbf{X_s} \\ \mathbf{X_s}'(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T}) & \mathbf{X_s}'\mathbf{X_s} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T})'\mathbf{Y} \\ \mathbf{X_s}'\mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

dan $(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T})' (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T}) = \mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T}'\mathbf{j_T} = \mathbf{T}\,\mathbf{I_N}$ disubtitusikan dalam persamaan

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T})'(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T}) & (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T})'\mathbf{X_s} \\ \mathbf{X_s}'(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T}) & \mathbf{X_s}'\mathbf{X_s} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T})'\mathbf{Y} \\ \mathbf{X_s}'\mathbf{Y} \end{bmatrix}$$ sehingga

dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{TI_N} & (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T})'\mathbf{X_s} \\ \mathbf{X_s}'(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T}) & \mathbf{X_s}'\mathbf{X}_s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T})'\mathbf{Y} \\ \mathbf{X_s}'\mathbf{Y} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Walaupun secara teori tidak ada masalah dalam memperoleh $(\mathbf{b_1}', \mathbf{b_s}')$ namun dapat menjadi masalah perhitungan yang disebabkan kesulitan dalam perhitungan invers. Alternatif yang dapat digunakan untuk menghitung $\mathbf{b_s}$ dan $\mathbf{b_{1i}}$ adalah sebagai berikut ini:

a. Untuk $\mathbf{b_s} = (\mathbf{X_s}' (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{X_s})^{-1}\mathbf{X_s}' (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{Y}$ (3.8) dengan

$$(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\,\mathbf{X_s} = \begin{bmatrix} \mathbf{D_T} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D_T} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{D_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X_{s1}} \\ \mathbf{X_{s2}} \\ \vdots \\ \mathbf{X_{sN}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{D_T X_{s1}} \\ \mathbf{D_T X_{s2}} \\ \vdots \\ \mathbf{D_T X_{sN}} \end{bmatrix}$$

dan

$$(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\,\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{D_T} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D_T} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{D_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y_1} \\ \mathbf{Y_2} \\ \vdots \\ \mathbf{Y_N} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{D_T Y_1} \\ \mathbf{D_T Y_2} \\ \vdots \\ \mathbf{D_T Y_N} \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{D_T}$ adalah matriks idempoten, sehingga $\mathbf{I_N} \times \mathbf{D_T}$ juga idempoten.

$$\mathbf{D_T} = \mathbf{I_T} - \frac{\mathbf{j_T j'_T}}{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{D_T D_T} = \left(\mathbf{I_T} - \frac{\mathbf{j_T j'_T}}{\mathbf{T}}\right)\left(\mathbf{I_T} - \frac{\mathbf{j_T j'_T}}{\mathbf{T}}\right)$$

$$= \mathbf{I_T} - 2\frac{\mathbf{j_T j'_T}}{\mathbf{T}} + \frac{\mathbf{j_T j'_T j_T j'_T}}{\mathbf{T}^2}$$

$$= \mathbf{I_T} - \frac{\mathbf{j_T j'_T}}{\mathbf{T}}$$

Selanjutnya $\mathbf{b_s}$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{b}_s = \left(\mathbf{X}_s'(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})' (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{X}_s \right)^{-1} \mathbf{X}_s' (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})' (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{Y}$$

$$= \left((\mathbf{X}_s(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T}))' (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{X}_s \right)^{-1} (\mathbf{X}_s (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T}))' (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{Y}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{D_T X_{s1}} \\ \mathbf{D_T X_{s2}} \\ \vdots \\ \mathbf{D_T X_{sN}} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{D_T X_{s1}} \\ \mathbf{D_T X_{s2}} \\ \vdots \\ \mathbf{D_T X_{sN}} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D_T X_{s1}} \\ \mathbf{D_T X_{s2}} \\ \vdots \\ \mathbf{D_T X_{sN}} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{D_T Y_1} \\ \mathbf{D_T Y_2} \\ \vdots \\ \mathbf{D_T Y_N} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X_{s1}}'\mathbf{D_T}' & \cdots & \mathbf{X_{sN}}'\mathbf{D_T}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D_T X_{s1}} \\ \mathbf{D_T X_{s2}} \\ \vdots \\ \mathbf{D_T X_{sN}} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X_{s1}}'\mathbf{D_T}' & \cdots & \mathbf{X_{sN}}'\mathbf{D_T}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D_T Y_1} \\ \mathbf{D_T Y_2} \\ \vdots \\ \mathbf{D_T Y_N} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\mathbf{X_{s1}}'\mathbf{D_T}'\mathbf{D_T X_{s1}} + \mathbf{X_{s2}}'\mathbf{D_T}'\mathbf{D_T X_{s2}} + \cdots + \mathbf{X_{sN}}'\mathbf{D_T}'\mathbf{D_T X_{sN}} \right)^{-1}$$
$$\left(\mathbf{X_{s1}}'\mathbf{D_T}'\mathbf{D_T Y_1} + \mathbf{X_{s2}}'\mathbf{D_T}'\mathbf{D_T Y_2} + \cdots + \mathbf{X_{sN}}'\mathbf{D_T}'\mathbf{D_T Y_N} \right)$$

$$= \left(\mathbf{X_{s1}}'\mathbf{D_T X_{s1}} + \mathbf{X_{s2}}'\mathbf{D_T X_{s2}} + \cdots + \mathbf{X_{sN}}'\mathbf{D_T X_{sN}} \right)^{-1} \left(\mathbf{X_{s1}}'\mathbf{D_T Y_1} + \mathbf{X_{s2}}'\mathbf{D_T Y_2} + \cdots + \mathbf{X_{sN}}'\mathbf{D_T Y_N} \right)$$

diperoleh:

$$\mathbf{b_s} = \left(\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{X}_{\mathbf{si}}'\mathbf{D_T X_{si}} \right)^{-1} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{X}_{\mathbf{si}}'\mathbf{D_T Y_i} \tag{3.9}$$

dengan

$$\mathbf{D_T} = \mathbf{I_T} - \frac{\mathbf{j_T j_T'}}{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{D_T} = \mathbf{I_T} - \frac{\mathbf{j_T j_T'}}{\mathbf{T}}, \quad j_T j_T' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{T} & \frac{1}{T} & \cdots & \frac{1}{T} \\ \frac{1}{T} & \frac{1}{T} & \cdots & \frac{1}{T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{T} & \frac{1}{T} & \cdots & \frac{1}{T} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{T} & -\frac{1}{T} & \cdots & -\frac{1}{T} \\ -\frac{1}{T} & 1-\frac{1}{T} & \cdots & -\frac{1}{T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{T} & -\frac{1}{T} & \cdots & 1-\frac{1}{T} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya

$$\mathbf{D_T X_{si}} = \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{T} & -\frac{1}{T} & \cdots & -\frac{1}{T} \\ -\frac{1}{T} & 1-\frac{1}{T} & \cdots & -\frac{1}{T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{T} & -\frac{1}{T} & \cdots & 1-\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\mathbf{s}1} \\ \mathbf{X}_{\mathbf{s}2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{\mathbf{s}N} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{X_{s1}} - \frac{1}{T}\left(\mathbf{X_{s1}} + \mathbf{X_{s2}} + \cdots + \mathbf{X_{sN}}\right) \\ \mathbf{X_{s2}} - \frac{1}{T}\left(\mathbf{X_{s1}} + \mathbf{X_{s2}} + \cdots + \mathbf{X_{sN}}\right) \\ \vdots \\ \mathbf{X_{sN}} - \frac{1}{T}\left(\mathbf{X_{s1}} + \mathbf{X_{s2}} + \cdots + \mathbf{X_{sN}}\right) \end{bmatrix}, \ \mathbf{X_{si}} = \begin{bmatrix} X_{2i1} & X_{3i1} & \cdots & X_{Ki1} \\ X_{2i2} & X_{3i2} & \cdots & X_{Ki2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{2iT} & X_{3iT} & \cdots & X_{KiT} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\overline{Y_i} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_{it}$$

$$\overline{\mathbf{X'_i}} = \left(\overline{X}_{2i}, \overline{X}_{3i}, \ldots, \overline{X}_{Ki}\right)$$

$$\overline{X}_{ki} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{kit} \ , \ k = 2,3\ldots K$$

$$\mathbf{D_T X_{si}} = \begin{bmatrix} X_{2i1} - \overline{X_{2i}} & \cdots & X_{Ki1} - \overline{X_{Ki}} \\ X_{2i2} - \overline{X_{2i}} & \cdots & X_{Ki2} - \overline{X_{Ki}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{2iT} - \overline{X_{2i}} & \cdots & X_{KiT} - \overline{X_{Ki}} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

sehingga

$$\left(\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{X'_{si} D_T X_{si}}\right)^{-1} = \left(\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{X'_{si} D_T{}' D_T X_{si}}\right)^{-1} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \left(\mathbf{D_T X_{si}}\right)' \mathbf{D_T X_{si}}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} X_{2i1} - \overline{X}_{2i} & \cdots & X_{Ki1} - \overline{X}_{Ki} \\ X_{2i2} - \overline{X}_{2i} & \cdots & X_{Ki2} - \overline{X}_{Ki} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{2iT} - \overline{X}_{2i} & \cdots & X_{KiT} - \overline{X}_{Ki} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_{2i1} - \overline{X}_{2i} & \cdots & X_{Ki1} - \overline{X}_{Ki} \\ X_{2i2} - \overline{X}_{2i} & \cdots & X_{Ki2} - \overline{X}_{Ki} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{2iT} - \overline{X}_{2i} & \cdots & X_{KiT} - \overline{X}_{Ki} \end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} X_{2i1} - \overline{X}_{2i} & \cdots & X_{2iT} - \overline{X}_{2i} \\ X_{3i1} - \overline{X}_{3i} & \cdots & X_{3iT} - \overline{X}_{3i} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{Ki1} - \overline{X}_{Ki} & \cdots & X_{KiT} - \overline{X}_{Ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{2i1} - \overline{X}_{2i} & \cdots & X_{Ki1} - \overline{X}_{Ki} \\ X_{2i2} - \overline{X}_{2i} & \cdots & X_{Ki2} - \overline{X}_{Ki} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{2iT} - \overline{X}_{2i} & \cdots & X_{KiT} - \overline{X}_{Ki} \end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} \left(X_{2i1} - \overline{X}_{2i}\right)\left(X_{2i1} - \overline{X}_{2i}\right) + \cdots + \left(X_{2iT} - \overline{X}_{2i}\right)\left(X_{2iT} - \overline{X}_{2i}\right) \\ \left(X_{3i1} - \overline{X}_{3i}\right)\left(X_{3i1} - \overline{X}_{3i}\right) + \cdots + \left(X_{3iT} - \overline{X}_{3i}\right)\left(X_{3iT} - \overline{X}_{3i}\right) \\ \vdots \\ \left(X_{Ki1} - \overline{X}_{Ki}\right)\left(X_{Ki1} - \overline{X}_{Ki}\right) + \cdots + \left(X_{KiT} - \overline{X}_{Ki}\right)\left(X_{KiT} - \overline{X}_{Ki}\right) \end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} \left(X_{2i1} - \overline{X}_{2i}\right)^2 + \cdots + \left(X_{2iT} - \overline{X}_{2i}\right)^2 \\ \left(X_{3i1} - \overline{X}_{3i}\right)^2 + \cdots + \left(X_{3iT} - \overline{X}_{3i}\right)^2 \\ \vdots \\ \left(X_{Ki1} - \overline{X}_{Ki}\right)^2 + \cdots + \left(X_{KiT} - \overline{X}_{Ki}\right)^2 \end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T} \left(X_{2it} - \overline{X}_{2i} \right)^2 \\ \sum_{t=1}^{T} \left(X_{3it} - \overline{X}_{3i} \right)^2 \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{T} \left(X_{Kit} - \overline{X}_{Ki} \right)^2 \end{bmatrix} \right]^{-1}$$

$$\left(\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{X}'_{\mathbf{si}} \mathbf{D_T} \mathbf{X_{si}} \right)^{-\mathbf{1}} = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \begin{bmatrix} \left(X_{2it} - \overline{X}_{2i} \right)^2 \\ \left(X_{3it} - \overline{X}_{3i} \right)^2 \\ \vdots \\ \left(X_{Kit} - \overline{X}_{Ki} \right)^2 \end{bmatrix} \right]^{-1}$$

Selanjutnya

$$\mathbf{D_T Y_i} = \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{T} & -\frac{1}{T} & \cdots & -\frac{1}{T} \\ -\frac{1}{T} & 1-\frac{1}{T} & \cdots & -\frac{1}{T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{T} & -\frac{1}{T} & \cdots & 1-\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y_{1i}} \\ \mathbf{Y_{2i}} \\ \vdots \\ \mathbf{Y_{Ni}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-\frac{1}{T})Y_{1i} + (-\frac{1}{T})Y_{2i} + \cdots + \left(-\frac{1}{T} \right) Y_{Ni} \\ \left(-\frac{1}{T} \right) Y_{1i} + \left(1-\frac{1}{T} \right) Y_{2i} + \cdots + (-\frac{1}{T}) Y_{Ni} \\ \vdots \\ (-\frac{1}{T})Y_{1i} + (-\frac{1}{T})Y_{2i} + \left(1-\frac{1}{T} \right) Y_{Ni} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Y_{1i} - \frac{1}{T}\left(Y_{1i} + Y_{2i} + \cdots + Y_{Ni} \right) \\ Y_{2i} - \frac{1}{T}\left(Y_{1i} + Y_{2i} + \cdots + Y_{Ni} \right) \\ \vdots \\ Y_{Ni} - \frac{1}{T}\left(Y_{1i} + Y_{2i} + \cdots + Y_{Ni} \right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D_T Y_i} = \begin{bmatrix} Y_{i1} - \overline{Y}_i \\ Y_{i2} - \overline{Y}_i \\ \vdots \\ Y_{iT} - \overline{Y}_i \end{bmatrix} \quad \text{i } = 1,2,3\ldots.,\text{N} \tag{3.11}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}'_{\mathbf{s1}} \mathbf{D_T} \mathbf{Y}_i = \left[\sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} X_{2i1} - \overline{X}_{2i} & \cdots & X_{Ki1} - \overline{X}_{Ki} \\ X_{2i2} - \overline{X}_{2i} & \cdots & X_{Ki2} - \overline{X}_{Ki} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{2iT} - \overline{X}_{2i} & \cdots & X_{KiT} - \overline{X}_{Ki} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \left(Y_{i1} - \overline{Y}_i\right) \\ \left(Y_{i2} - \overline{Y}_i\right) \\ \vdots \\ \left(Y_{iT} - \overline{Y}_i\right) \end{bmatrix} \right]$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} X_{2i1} - \overline{X}_{2i} & X_{2i2} - \overline{X}_{2i} & \cdots & X_{2iT} - \overline{X}_{2i} \\ X_{3i1} - \overline{X}_{3i} & X_{3i2} - \overline{X}_{3i} & \cdots & X_{3iT} - \overline{X}_{3i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{Ki1} - \overline{X}_{Ki} & X_{Ki2} - \overline{X}_{Ki} & \cdots & X_{KiT} - \overline{X}_{Ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(Y_{i1} - \overline{Y}_i\right) \\ \left(Y_{i2} - \overline{Y}_i\right) \\ \vdots \\ \left(Y_{iT} - \overline{Y}_i\right) \end{bmatrix} \right]$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} \left(X_{2i1} - \overline{X}_{2i}\right)\left(Y_{i1} - \overline{Y}_i\right) + \left(X_{2i2} - \overline{X}_{2i}\right)\left(Y_{i2} - \overline{Y}_i\right) + \cdots + \left(X_{2iT} - \overline{X}_{2i}\right)\left(Y_{iT} - \overline{Y}_i\right) \\ \left(X_{3i1} - \overline{X}_{3i}\right)\left(Y_{i1} - \overline{Y}_i\right) + \left(X_{3i2} - \overline{X}_{3i}\right)\left(Y_{i2} - \overline{Y}_i\right) + \cdots + \left(X_{3iT} - \overline{X}_{3i}\right)\left(Y_{iT} - \overline{Y}_i\right) \\ \vdots \\ \left(X_{Ki1} - \overline{X}_{Ki}\right)\left(Y_{i1} - \overline{Y}_i\right) + \left(X_{Ki2} - \overline{X}_{Ki}\right)\left(Y_{i2} - \overline{Y}_i\right) + \cdots + \left(X_{KiT} - \overline{X}_{Ki}\right)\left(Y_{iT} - \overline{Y}_i\right) \end{bmatrix} \right]$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T} \left(X_{2it} - \overline{X}_{2i}\right)\left(Y_{it} - \overline{Y}_i\right) \\ \sum_{t=1}^{T} \left(X_{3it} - \overline{X}_{3i}\right)\left(Y_{it} - \overline{Y}_i\right) \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{T} \left(X_{Kit} - \overline{X}_{Ki}\right)\left(Y_{it} - \overline{Y}_i\right) \end{bmatrix} \right]$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \begin{bmatrix} \left(X_{2it} - \overline{X}_{2i}\right)\left(Y_{it} - \overline{Y}_i\right) \\ \left(X_{3it} - \overline{X}_{3i}\right)\left(Y_{it} - \overline{Y}_i\right) \\ \vdots \\ \left(X_{Kit} - \overline{X}_{Ki}\right)\left(Y_{it} - \overline{Y}_i\right) \end{bmatrix} \right]$$

Dari persamaan (3.9) dengan disubstitusikan persamaan (3.10 dan 3.11) diperoleh:

$$\mathbf{b_s} = \left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\begin{bmatrix}\left(X_{2it} - \overline{X}_{2i}\right)^2 \\ \left(X_{3it} - \overline{X}_{3i}\right)^2 \\ \vdots \\ \left(X_{Kit} - \overline{X}_{Ki}\right)^2\end{bmatrix}\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\begin{bmatrix}\left(X_{2it} - \overline{X}_{2i}\right)\left(Y_{it} - \overline{Y}_i\right) \\ \left(X_{3it} - \overline{X}_{3i}\right)\left(Y_{it} - \overline{Y}_i\right) \\ \vdots \\ \left(X_{Kit} - \overline{X}_{Ki}\right)\left(Y_{it} - \overline{Y}_i\right)\end{bmatrix}\right] \tag{3.12}$$

b. untuk $\mathbf{b_{1i}} = \overline{\mathbf{Y_i}} - \overline{\mathbf{X'_i}}\mathbf{b_s}$ i = 1,2…,N

sehingga pada persamaan (3.3) dapat ditulis:

$$(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{Y_i} = (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1i}}\mathbf{j_T} + (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{X_{si}}\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{s}} + (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{D_T Y_i} = \mathbf{D_T}\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1i}}\mathbf{j_T} + \mathbf{D_T X_{si}}\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{s}} + \mathbf{D_T}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{i}}$$

dengan

$$\mathbf{D_T j_T} = \left(\mathbf{I_N} - \frac{\mathbf{j_T j'_T}}{\mathbf{T}}\right)\mathbf{j_T}$$

$$= \mathbf{j_T} - \mathbf{j_T}\left(\frac{\mathbf{j'_T j_T}}{\mathbf{T}}\right)$$

$$= \mathbf{j_T} - \mathbf{j_T}(1) = 0$$

Diperoleh model *fixed effect* pada data pooling adalah

$$\mathbf{D_T Y_i} = \mathbf{D_T X_{si}}\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{s}} + \mathbf{D_T}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{i}}$$

$$(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{Y_i} = (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{X_{si}}\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{s}} + (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{i}} \tag{3.13}$$

2. **Estimasi Variansi**

Menurut Judge *et al.* (1998: 205) estimator tak bias dari $\sigma_\varepsilon^{\ 2}$ untuk persamaan linier ganda adalah $\hat{\sigma}_\varepsilon^{\ 2}$ dengan

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\varepsilon}^{2} = \frac{e'e}{N-K}$$

dengan

$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$ adalah variansi dari *error*

e adalah *error* dari model regresi linier ganda, e ~ N(0, σ^2)

N adalah banyaknya observasi

K adalah banyaknya variabel yang tidak diketahui atau banyaknya parameter

Model *fixed effect* pada data pooling :

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T} \quad \mathbf{X_s}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta_1}\\ \boldsymbol{\beta_s}\end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Pada model *fixed effect* terdapat $\boldsymbol{\beta_1}$ yang terdiri dari N bentuk intersep untuk setiap individu dan $\boldsymbol{\beta_s}$ adalah *slope* yang diasumsikan sama untuk setiap individu mempunyai $K*$ bentuk intersep. Apabila $K*$ = K-1, maka $\boldsymbol{\beta_s}$ adalah vektor *slope* berukuran $(K* \times 1)$, maka banyaknya parameter $N + K*$. Jika setiap individu diasumsikan sama untuk setiap intersep maka data dapat dilakukan sebagai satu sampel dengan NT observasi.

dan vektor *error* pada model *fixed effect*:

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - [\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{J_T} \quad \mathbf{X_s}]\begin{bmatrix}\mathbf{b_1}\\ \mathbf{b_s}\end{bmatrix}$$

sehingga estimator tak bias dari σ_{ε}^{2} untuk model *fixed effect* pada data pooling adalah $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$ dengan

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{2} = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{NT - (N + K*)}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{e}^{'}\mathbf{e}}{NT - N - K*} \quad , K* = K\text{-}1$$

Sedangkan model *fixed effect* pada data pooling berdasarkan persamaan (3.13):

$$(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{Y_i} = (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{X_{si}}\boldsymbol{\beta}_\mathbf{s} + (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{i}$$

Pada model *fixed effect* pada data pooling diatas mempunyai $\boldsymbol{\beta}_\mathbf{s}$ untuk setiap individu sebanyak $K*$ dengan $K* = K\text{-}1$, dan vektor *error*nya adalah

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$$

$$(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{e} = (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{Y} - (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{X_s b_s}$$

$$\mathbf{e} = (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{Y} - (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{X_s b_s}$$

sehingga estimator tak bias dari $\sigma_\varepsilon^{\ 2}$ untuk model *fixed effect* pada data pooling adalah $\sigma_\varepsilon^{*2} = \dfrac{\mathbf{e}^{'}\mathbf{e}}{NT - K*}$

Ini adalah estimator yang bias untuk $\sigma_\varepsilon^{\ 2}$. Oleh karena itu $\sigma^{*2}_{\ \varepsilon}$ dikalikan dengan $[(NT - K*)/(NT - N - K')]$ agar menjadi $\sigma_\varepsilon^{\ 2}$ yang *best linier unbiased* .

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{2}} = \sigma_\varepsilon^{*2} \times \frac{(NT - K*)}{(NT - N - K*)}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{e}^{'}\mathbf{e}}{NT - K*}\frac{\mathbf{(}NT - K*\mathbf{)}}{\mathbf{(}NT - N - K*\mathbf{)}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{e}^{'}\mathbf{e}}{NT - N - K*}$$

Jadi $\hat{\sigma}_\varepsilon^{\ 2}$ merupakan estimator yang tidak bias untuk $\sigma_\varepsilon^{\ 2}$

3. Matriks Variansi Kovariansi b adalah

Var-cov $\mathbf{(b)} = \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}{}^{2}\,\mathbf{(X'X)^{-1}}$

dengan $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T} & \mathbf{X_s} \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_s} \end{bmatrix}$ diperoleh

$$\text{Var-cov} \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_s} \end{pmatrix} = \sigma_{\varepsilon}^{2} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T} & \mathbf{X_s} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T} & \mathbf{X_s} \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \sigma_{\varepsilon}^{2} \left(\begin{bmatrix} (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T})' \\ \mathbf{X_s}' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T} & \mathbf{X_s} \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \sigma_{\varepsilon}^{2} \begin{bmatrix} (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T})'(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T}) & (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T})'\,\mathbf{X_s} \\ \mathbf{X_s'}\,(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T}) & \mathbf{X_s'X_s} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \sigma_{\varepsilon}^{2} \begin{bmatrix} \mathbf{TI_N} & (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T})'\,\mathbf{X_s} \\ \mathbf{X_s'}\,(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T}) & \mathbf{X_s'X_s} \end{bmatrix}^{-1} \tag{3.14}$$

Karena $\mathbf{X} = (\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\,\mathbf{X_s}$ maka

$$\text{Var-cov}\begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_s} \end{bmatrix} = \sigma_{\varepsilon}^{2} \left[[(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{X_s}]' [(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{X_s}] \right]^{-1}$$

$$= \sigma_{\varepsilon}^{2} \left[\left[\mathbf{X_s}'(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})' \right] [(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{X_s}] \right]^{-1}$$

$$= \sigma_{\varepsilon}^{2} \left[\mathbf{X_s}'(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})'(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{X_s} \right]^{-1}$$

$$= \sigma_{\varepsilon}^{2} \left[\mathbf{X_s}'(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{X_s} \right]^{-1} \tag{3.15}$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \begin{bmatrix} \left(X_{2it} - \overline{X}_{2i}\right)^2 \\ \left(X_{3it} - \overline{X}_{3i}\right)^2 \\ \vdots \\ \left(X_{Kit} - \overline{X}_{Ki}\right)^2 \end{bmatrix} \right]^{-1}$$

sehingga *standard error* adalah $s = \left[\sigma_\varepsilon^2 \left[\mathbf{X_s}' \left(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T} \right) \mathbf{X_s} \right]^{-1} \right]^{1/2}$ dengan s adalah estimator dari σ.

4. **Uji Hipotesis Model *Fixed Effect* Pada Data Pooling**

Untuk menguji apakah model *fixed effect* pada data pooling signifikan dapat dilakukan langkah-langkah uji hipotesis sebagai berikut:

a. H_0 : $\beta_{11} = \beta_{12} = ... = \beta_{1N}$ (β_{1j} tidak signifikan)

   H_1 : terdapat β_{1j} yang tidak sama (β_{1j} signifikan)

b. Taraf signifikansi α

c. Statistik uji :

$$F = \frac{\left(\overline{e}'\overline{e} - e'e\right) / \left(N-1\right)}{e'e \,/\, \left(NT - N - K^*\right)}$$

   dengan

   $\overline{e}'\overline{e}$ adalah *sum squared resid* untuk model regresi pada data pooling:

$$Y_{it} = \beta_{11} + \sum_{k=2}^{K} \beta_k X_{kit} + \varepsilon_{it}$$

   $e'e$ adalah *sum squared resid* untuk model *fixed effect* pada data pooling:

$$Y_{it} = \sum_{j=1}^{N} \beta_{1j} D_{jt} + \sum_{k=2}^{K} \beta_k X_{kit} + \varepsilon_{it}$$

   N adalah banyaknya unit individu, *T* adalah banyaknya waktu, $K^* = K$-1 dan *K* adalah banyaknya variabel.

d. Kriteria keputusan : H_0 ditolak jika $F_{hit} > F_{\alpha(N-1,\, NT-(N-(K-1)))}$

e. Perhitungan

f. Kesimpulan

B. Penerapan Model *Fixed Effect* pada Data Pooling

Untuk lebih memahami model *fixed effect* pada data pooling yang diuraikan sebelumnya, akan diberikan contoh penerapan sebagai berikut:

1. Penerapan model *fixed effect* pada investasi dalam suatu perusahaan.

Data pooling diambil dari Green (1997, 642) yaitu tentang investasi dalam suatu perusahaan. Investasi suatu perusahaan mengalami fluktuasi dari tahun ke tahun. Salah satu penyebabnya adalah keuntungan perusahaan. Seorang peneliti ingin mengetahui bagaimana pengaruh keuntungan perusahaan (X) terhadap investasi perusahaan (Y) . Data untuk setiap perusahaan adalah data *time series*. Apabila i = 1 mewakili perusahaan A, i = 2 mewakili perusahaan B, i = 3 mewakili perusahaan C maka berikut ini data investasi dan keuntungan dari 3 perusahaan A, B,C selama 10 tahun:

Tabel 3.1 Investasi dan Keuntungan dari 3 Perusahaan

t	Y			X		
	i = 1	i = 2	i =3	i = 1	i = 2	i = 3
1	13,32	20,30	8,85	12,85	22,93	8,65
2	26,30	17,47	19,60	25,69	17,96	16,55
3	2,62	9,31	3,87	5,48	9,16	1,47
4	14,49	18,01	24,19	13,79	18,73	24,91
5	15,89	7,63	3,99	15,41	11,31	5,01
6	12,20	19,84	5,73	12,59	21,15	8,34
7	14,93	13,76	26,68	16,64	16,13	22,7
8	29,82	10.00	11,49	26,45	11,61	8,36
9	20,32	19,51	18,49	19,64	19,55	15,44
10	4,77	18,32	20,84	5,43	17,06	17,87

Dari data diatas akan diestimasi parameter-parameter model *fixed effect* pada data pooling.

Model *fixed effect* pada data pooling :

$$Y_{it} = \sum_{j=1}^{3} \beta_{1j} D_{jt} + \beta_2 X_{2it} + \varepsilon_{it} \qquad \text{atau}$$

$$Y_{it} = \beta_{11} D_{1t} + \beta_{12} D_{2t} + \beta_{13} D_{3t} + \beta_2 X_{2it} + \varepsilon_{it}$$

t =1,2,...,10
i =1,2,3

Rata-rata dari X dan Y masing-masing perusahaan adalah

$\overline{X}_{21}$ = 15,397 $\overline{Y}_1$ = 15,466
$\overline{X}_{22}$ = 16,559 $\overline{Y}_2$ = 15,415
$\overline{X}_{23}$ = 12,93 $\overline{Y}_3$ = 14,373

Bentuk deviasi dari rata-rata X dan Y untuk mengestimasi b_2 sebagai berikut:

Table 3.2 Bentuk Deviasi dari Rata- Rata

t	$Y_{it} - \overline{Y}_i$			$X_{2it} - \overline{X}_{2i}$		
	i = 1	i = 2	i = 3	i = 1	i = 2	i = 3
1	-2,146	4,885	-5,523	-2,547	6,371	-4,28
2	10,834	2,055	5,227	10,293	1,401	3,62
3	-12,846	-6,105	-10,503	-9,917	-7,399	-11,46
4	-0,976	2,595	9,817	-1,607	2,171	11,98
5	0,424	-7,785	-10,383	0,013	-5,249	-7,92
6	-3,266	4,425	-8,643	-2,807	4,591	-4,59
7	-0,536	-1,655	12,307	1,243	-0,429	9,77
8	14,354	-5,415	-2,883	11,053	-4,949	-4,57
9	4,854	4,095	4,117	4,243	2,991	2,51
10	-10,696	2,905	6,467	-9,967	0,501	4,94
$\sum\sum\left(X_{2it} - \overline{X}_{2i}\right)^2$				1183,925		
$\sum\sum\left(X_{2it} - \overline{X}_{2i}\right)\left(Y_{it} - \overline{Y}_i\right)$				1305,636		

$\mathbf{b}_2 = \left(\left(\mathbf{X}_2 \left(\mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{D}_{10} \right) \right)' \left(\mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{D}_{10} \right) \mathbf{X}_2 \right)^{-\mathbf{1}} \left(\mathbf{X}_2 \left(\mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{D}_{10} \right) \right)' \left(\mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{D}_{10} \right) \mathbf{Y}$ berdasarkan

persamaan (3.12) maka

$$\mathbf{b_s} = \left[\sum_{i=1}^{3} \sum_{t=1}^{10} \left(X_{2it} - \overline{X}_{2i} \right)^2 \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{10} \sum_{t=1}^{10} \left(X_{2it} - \overline{X}_{2i} \right) \left(Y_{it} - \overline{Y}i \right) \right]$$

$= (1183.925)^{-1}\ 1305.636$

= 1.102802965

sedangkan intersep masing-masing perusahaan berdasarkan persamaan:

$\mathbf{b_{1i}} = \overline{\mathbf{Y_i}} - \overline{\mathbf{X_i'}}\mathbf{b}_2$

$b_{11} = \overline{Y_1} - \overline{X}_{21} b_2$

= 15,466- 15,397(1.102802965)

= -1.5138

$b_{12} = \overline{Y_2} - \overline{X}_{22} b_2$

= 15,415- 16,559 (1.102802965)

= -2.8463

$b_{13} = \overline{Y_3} - \overline{X}_{23} b_2$

= 14,373- 12,93 (1.102802965)

= 1.1028

Model *fixed effect* pada data investasi perusahaan adalah

$\hat{Y}_{it} = -1.5138 D_{1t} + -2.8463 D_{2t} + 0.1137 D_{3t} + 1.1028 X_{2it}$

Diperoleh persamaan untuk masing-masing perusahaan dengan model *fixed effect* pada data pooling menggunakan metode kuadrat terkecil adalah

$\hat{Y}_{1t} = -1.5138 + 1.1028 X_{21t}$

$$\hat{Y}_{2t} = -2.8463 + 1.1028 X_{22t}$$

$$\hat{Y}_{3t} = 0.1137 + 1.1028 X_{23t}$$

Untuk menghitung *standard error* dari b_2 akan dicari $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$

$$e'e = \sum_{i=1}^{3}\sum_{t=1}^{10}\left(e_{it} - \bar{e}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{t=1}^{10}\left(\left(Y_{it} - \bar{Y}_i\right) - 1.1028 \sum_{i=1}^{3}\sum_{t=1}^{10} \left(X_{it} - \bar{X}_i\right) \right)^2$$

Tabel 3.3 *Error* dari Model *Fixed Effect* pada Data Pooling

t	e_1	e_2	e_3	e_1^2	e_2^2	e_3^2
1	0.6628	-2.1409	-0.8030	0.4393	4.5836	0.6448
2	-0.5171	0.5099	1.2348	0.2674	0.2600	1.5248
3	-1.9095	2.0546	2.1351	3.6462	4.2215	4.5587
4	0.7962	0.2008	-3.3945	0.6339	0.0403	11.5231
5	0.4096	-1.9963	-1.6488	0.1678	3.9855	2.7185
6	-0.1704	-0.6379	-3.5811	0.0290	0.4070	12.8245
7	-1.9067	-1.1818	1.5326	3.6358	1.3968	2.3489
8	2.1647	0.0427	2.1568	4.6860	0.0018	4.6518
9	0.1748	0.7965	1.3489	0.0305	0.6344	1.8197
10	0.2956	2.3524	1.0191	0.0874	5.5342	1.0386
$\sum_{i=1}^{3}\sum_{t=1}^{10} e_{it}^2$				78.3428		

sehingga

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{NT - N - K^*}$$

$$= \frac{78.3428}{3.10 - 3 - 1}$$

$$= 3.0131$$

$$Var - \text{cov}\begin{bmatrix}\mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_s}\end{bmatrix} = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} \left[\mathbf{X_s}'\left(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T}\right)\mathbf{X_s} \right]^{-1}$$

$$= 3.0131 \left[1183.925 \right]^{-\mathbf{1}}$$

$$= 2.5450$$

dan *standard error* untuk b_2 adalah

$$s = \left[\sigma_\varepsilon^2 \left[\mathbf{X_s}'(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T})\mathbf{X_s} \right]^{-1}\right]^{1/2}$$

$$= [\ 2.5450]^{1/2}$$

$$= 0.050448$$

Apabila data pooling dianalisis menggunakan komputer dengan program eviews maka outputnya adalah

Dependent Variable: Y?
Method: Pooled Least Squares
Date: 06/15/08 Time: 20:26
Sample: 1901 1910
Included observations: 10
Total panel observations 30

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X?	1.102803	0.050449	21.85983	0.0000
Fixed Effects				
_A--C	-1.513865			
_B--C	-2.846322			
_C--C	0.113751			

R-squared	0.948655	Mean dependent var	15.08467
Adjusted R-squared	0.942730	S.D. dependent var	7.253567
S.E. of regression	1.735855	Sum squared resid	78.34297
Log likelihood	-38.80667	Durbin-Watson stat	1.759246

Berdasarkan output, persamaan regresi untuk masing-masing perusahaan adalah

$$\hat{Y}_{1t} = -1.5138 + 1.1028 X_{21t}$$

$$\hat{Y}_{2t} = -2.8463 + 1.1028 X_{22t}$$

$$\hat{Y}_{3t} = 0.1137 + 1.1028 X_{23t}$$

Model *fixed effect* pada data investasi perusahan adalah

$$\hat{Y}_{it} = -1.5138 D_{1t} + -2.8463 D_{2t} + 0.1137 D_{3t} + 1.1028 X_{2it}$$

Hasil estimasi yang diperoleh dari perhitungan manual sama dengan hasil estimasi menggunakan program eviews, baik nilai koefisien untuk *X* maupun intersepnya. Nilai koefisien untuk variabel keuntungan perusahaan (*X*) = 1,1028 dengan standar error untuk b_2 adalah 0.050449. Variabel keuntungan signifikan pada α = 0.05 yang berarti keuntungan perusahaan berpengaruh terhadap investasi perusahaan. Untuk mengetahui apakah model *fixed effect* pada data pooling signifikan dengan dilakukan uji hipotesis.

Langkah-langkah uji hipotesis sebagai berikut:

a. Ho: $\beta_{11} = \beta_{12} = ... = \beta_{13}$ (β_{1j} tidak signifikan)

   H_1 : terdapat β_{1j} yang tidak sama (β_{1j} signifikan)

b. Taraf signifikansi $\alpha = 0.05$

c. Statistik uji :

$$F = \frac{\left(\bar{e}'\bar{e} - e'e\right) / (N-1)}{e'e / (NT - N - K^*)}$$

d. Kriteria keputusan : H_0 ditolak jika $F_{hit} > F_{0.05\,(2,\,26)}$

e. Perhitungan

   Persamaan regresi data pooling dengan menggunakan metode kuadrat terkecil berdasarkan output pada lampiran 1 adalah

$$\hat{Y}_{it} = -0.766257 + 1.059412 X_{it}$$

$$e_{it} = Y_{it} + 0.766257 - 1.059412 X_{it}$$

Tabel 3.4 *Error* dari Model Regresi pada DataPooling

t	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{e}_3$	$\bar{e}_1^{\,2}$	$\bar{e}_2^{\,2}$	$\bar{e}_3^{\,2}$
1	0.47318	-3.226	0.4523	0.2239	10.4074	0.2046
2	-0.15003	-0.7907	2.6329	0.002251	0.6253	8.0258
3	-2.41932	0.3720	3.0789	5.8531	0.1384	9.4797
4	1.09696	-1.0665	-1.4336	1.2033	1.1374	2.0554
5	0.3307	-3.5856	-0.5513	0.1093	12.8571	0.3040
6	-0.3717	-1.8003	-2.3368	0.13819	3.2411	5.4606
7	-1.9323	-2.562	3.397	3.7340	6.5641	11.5437
8	2.5648	-1.5335	3.39957	6.5782	2.3516	11.5570
9	0.2794	-0.4352	2.8989	0.0780	0.1894	8.4038
10	-0.21635	1.0126	2.6745	0.0468	1.0255	7.1532
$\sum_{i=1}^{3}\sum_{t=1}^{10} e_{it}^{2}$				120.7083		

$$F = \frac{\left(\bar{e}'\bar{e} - e'e\right) / (N-1)}{e'e \,/\, (NT - N - K^*)}$$

$$= \frac{(120.708 - 78.3428) / (3-1)}{78.3428 / (3.10 - 3 - 1)}$$

$$= 7.03003$$

f. Kesimpulan

F_{hit} = 7.03003 > $F_{0.05\ (2,\ 26)}$ = 3.37 maka H_0 ditolak artinya β_{1j} tidak signifikan sehingga model *fixed effect* pada data investasi perusahaan signifikan. Model *fixed effect* pada data investasi perusahaan adalah

$$\hat{Y}_{it} = -1.5138D_{1t} + -2.8463D_{2t} + 0.1137D_{3t} + 1.1028X_{2it}$$

Model *fixed effect* pada data pooling mampu menjelaskan perbedaaan investasi ketiga perusahaan tersebut. Nilai intersep masing-masing perusahaan adalah A sebesar -1.5138, B sebesar -2.8463 dan C sebesar 0.11028. Perbedaan intersep perusahaan dapat menggambarkan gaya manajerial antara ketiga perusahan. Nilai koefisien determinasi sebesar

0.948655 yang berarti model mampu menjelaskan variasi investasi sebesar 0.948655.

2. Penerapan model *fixed effect* pada bantuan pembangunan di Propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta. Data diambil dari Mudrajad Kuncoro (2001, 127). Seorang peneliti ingin mengetahui bagaimana pengaruh Pendapatan Asli Daerah dan Subsidi Daerah Otonom terhadap bantuan pembangunan di Propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta. Misalkan Y adalah perkembangan bantuan pembangunan pada semua Daerah Tingkat II di Propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta, X_1 adalah Pendapatan Asli Daerah dan X_2 adalah Subsidi Daerah Otonom dengan A adalah Kulon Progo, B adalah Bantul, C adalah Gunung Kidul, D adalah Sleman, E adalah Yogyakarta. Data untuk setiap Dati II di Propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta adalah data *time series*. Berikut ini data perkembangan bantuan pembangunan di propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta, Pendapatan Asli Daerah dan Subsidi Daerah Otonom selama 7 tahun:

Tabel 3. 5 Perkembangan Bantuan Pembangunan pada Semua Daerah Tingkat II di Propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta, Pendapatan Asli Daerah dan Subsidi Daerah Otonom

obs	t	Y	X_1	X_2
A	1	1425546	491157	2011924
A	2	1830884	840404	2303464
A	3	3663068	981868	2499176
A	4	4794094	1162409	2786335
A	5	5844387	1189691	3230905
A	6	7307389	1493146	3964174
A	7	5792939	1881885	4280630
B	1	2314370	941406	2030145
B	2	2598096	1102415	2549748
B	3	4737875	1370136	2846302
B	4	6738392	1878962	3380793
B	5	7847546	2454605	4125549
B	6	8041813	2494205	4837708
B	7	8427426	3118588	5185432
C	1	2022850	822101	2341085
C	2	2424461	939831	2678916
C	3	5045461	1169435	2789259
C	4	5045937	1387267	3363586
C	5	8895931	1575922	3487614
C	6	8440303	1888178	4739240
C	7	9300002	2139780	4525480
D	1	1611746	1751822	2282936
D	2	2496174	2114612	2590774
D	3	5719510	2384367	2866663
D	4	7161940	2955461	3866893
D	5	8820114	2900155	3942863
D	6	10262753	3467932	4866394
D	7	10446460	5168421	5318609
E	1	947580	3777696	3406041
E	2	2002179	4339078	3681633
E	3	3328928	4831770	4168775
E	4	3890322	3542722	5096644
E	5	4804406	7948501	5635809
E	6	5236682	10246384	6940780
E	7	6544334	12519223	7417300

Dari data diatas akan diestimasi parameter-parameter model *fixed effect* pada data pooling.

Model *fixed effect* pada data pooling dugaan adalah

$$\hat{Y}_{it} = \hat{\beta}_{11}D_{1t} + \hat{\beta}_{12}D_{2t} + \hat{\beta}_{13}D_{3t} + \hat{\beta}_{14}D_{4t} + \hat{\beta}_{15}D_{5t} + \hat{\beta}_{2}X_{2it} + \hat{\beta}_{3}X_{3it}$$

t =1,2,...,7
i =1,2,3,4,5

dengan 1 = Kulon Progo, 2 = Bantul, 3 = Gunung Kidul, 4 = Sleman,

5 = Yogyakarta.

Berikut output data perkembangan bantuan DIY dengan menggunakan program eviews:

Dependent Variable: Y?
Method: Pooled Least Squares
Date: 06/14/08 Time: 21:42
Sample: 1989 1995
Included observations: 7
Balanced sample
Total panel observations 35

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X1?	-0.553120	0.222184	-2.489472	0.0173
X2?	2.696397	0.330096	8.168523	0.0000
Fixed Effects				
_A--C	-3103601.			
_B--C	-2742149.			
_C--C	-2549787.			
_D--C	-1628601.			
_E--C	-6448748.			

R-squared	0.830545	Mean dependent var	5308911.
Adjusted R-squared	0.794233	S.D. dependent var	2770477.
S.E. of regression	1256732.	Sum squared resid	4.42E+13
Log likelihood	-507.2967	F-statistic	137.2353
Durbin-Watson stat	1.987962	Prob(F-statistic)	0.000000

Berdasarkan autput diatas untuk nilai

b_2 = -0,55312 dengan *standard error* 0.222184

b_3 = 2,696397 dengan *standard error* 0.330096

Intersep untuk setiap individu adalah sebagai berikut:

A = -3103601

B = -2742149.

C = -2549787

D = -1628601

E = -6448748

sehingga persamaan untuk masing-masing individu adalah

$$\hat{Y}_{1t} = -3103601 + -0.55312 X_{21t} + 2.696397 X_{31t}$$

$$\hat{Y}_{2t} = -2742149 + -0.55312 X_{22t} + 2.696397 X_{32t}$$

$$\hat{Y}_{3t} = -2549787 + -0.55312 X_{23t} + 2.696397 X_{33t}$$

$$\hat{Y}_{4t} = -1628601 + -0.55312 X_{24t} + 2.696397 X_{34t}$$

$$\hat{Y}_{5t} = -6448748 + -0.55312 X_{25t} + 2.696397 X_{35t}$$

Model *fixed effect* pada data bantuan pembangunan adalah

$$\widehat{Y}_{it} = -3103601 D_{1t} - 2742149 D_{2t} - 2549787 D_{3t} - 1628601 D_{4t} - 6448748 D_{5t} - 0.55312 X_{2it} + 2.696397 X_{3it}$$

(0.222184) (0.330096)

Nilai koefisien untuk variabel Pendapatan Asli Daerah (X_1) adalah -0.55312 dengan *standard error*nya adalah 0.222184 dan Subsidi Daerah Otonom (X_2) adalah 2.696397 dengan *standard error*nya adalah 0.330096. Variabel Pendapatan Asli Daerah dan Subsidi Daerah Otonom signifikan pada α = 0.05 yang berarti Pendapatan Asli Daerah dan Subsidi Daerah Otonom berpengaruh terhadap perkembangan bantuan pembangunan.

Untuk mengetahui apakah model *fixed effect* pada data pooling signifikan dilakukan uji hipotesis.

Langkah- langkah uji hipotesis sebagai berikut:

a. H_0: $\beta_{11} = \beta_{12} = \ldots = \beta_{1N}$ (β_{1j} tidak signifikan)

H$_1$: terdapat β_{1j} yang tidak sama (β_{1j} signifikan)

b. Taraf signifikansi α = 0.05

c. Statistik uji :

$$F = \frac{\left(\bar{e}'\bar{e} - e'e\right) / \left(N - 1\right)}{e'e / \left(NT - N - K*\right)}$$

d. Kriteria keputusan : H$_0$ ditolak jika $F_{hit} > F_{0.05\ (4,\ 28)}$ = 2.71

e. Perhitungan

Berdasarkan output data perkembangan bantuan DIY diperoleh

$e'e$ = 4.42E+13 untuk *sum squared resid* model *fixed effect* pada data pooling dan berdasarkan lampiran 2 $\overline{\varepsilon'}\,\overline{\varepsilon}$ = 9.71E+13 adalah *sum squared resid* menggunakan model regresi data pooling menggunakan metode kuadrat terkecil.

$$F = \frac{\left(9.71\times10^{13} - 4.42\times10^{13}\right) / \left(5 - 1\right)}{4.42\times10^{13} / \left(5.7 - 5 - 2\right)}$$

$$= \frac{5.29\times10^{13} / 4}{4.42\times10^{13} / 28}$$

= 8.3778

f. Kesimpulan

Karena F_{hit} = 8.3778 > $F_{0.05\ (4,\ 28)}$ = 2.71 maka H$_0$ ditolak artinya β_{1j} signifikan sehingga model *fixed effect* pada data bantuan pembangunan signifikan.

Model *fixed effect* pada data bantuan pembangunan adalah

$$\hat{Y}_{it} = -3103601D_{1t} - 2742149D_{2t} - 2549787D_{3t} - 1628601D_{4t} - 6448748D_{5t} - 0.55312X_{2it} + 2.696397X_{3it}$$

Model *fixed effect* pada data pooling mampu menjelaskan perbedaaan bantuan pembangunan untuk Daerah Tingkat II di Propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta. Nilai intersep masing-masing Daerah Tingkat II adalah A sebesar -3103601, B sebesar -2742149, C sebesar -2549787, D sebesar -1628601 dan E sebesar -6448748. Perbedaan intersep ini dapat menggambarkan kemakmuran suatu daerah. Nilai koefisien determinasi sebesar 0.830545 yang berarti model mampu menjelaskan variasi investasi sebesar 0.830545.

BAB IV

PENUTUP

A. Kesimpulan

Pada skripsi berjudul *model fixed effect* pada analisis data pooling ini, beberapa kesimpulan yang dapat diambil adalah:

1. Estimasi parameter model *fixed effect* pada data pooling .

Data pooling adalah data beberapa individu yang pengamatannya dilakukan dari waktu ke waktu. Bentuk umum model regresi pada data pooling adalah

$$\mathrm{Y}_{\mathrm{it}} = \beta_{1\mathrm{i}} + \sum_{k=2}^{K} \beta_k \mathrm{X}_{\mathrm{kit}} + \varepsilon_{it}$$

t = 1,2…T i = 1,2…N k = 2,3…K

Model *fixed effect* pada data pooling dapat dituliskan dalam bentuk berikut ini:

$$Y_{it} = \sum_{j=1}^{N} \beta_{1j} D_{jt} + \sum_{k=2}^{K} \beta_k X_{kit} + \varepsilon_{it}$$

Dengan D_{jt} adalah variabel *dummy* dan mengambil nilai 0 atau 1. Dapat juga ditulis berikut ini:

$$\mathrm{D}_{\mathrm{jt}} = \begin{cases} 1 & jika\ j = i \\ 0 & jika\ \ j \neq i \end{cases}$$

Apabila ditulis dalam bentuk matriks:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T} & \mathbf{X_s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_\mathbf{1} \\ \boldsymbol{\beta}_\mathbf{s} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Estimasi parameter model *fixed effect* pada data pooling yaitu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{TI_N} & \left(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T}\right)' \mathbf{X_s} \\ \mathbf{X_s'}\left(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T}\right) & \mathbf{X_s'X}_s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{j_T}\right)' \mathbf{Y} \\ \mathbf{X_s'Y} \end{bmatrix}$$

untuk menghitung $\mathbf{b_1}$ dan $\mathbf{b_s}$ digunakan rumus berikut:

$$\mathbf{b_s} = \left(\mathbf{X_s'} \left(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T}\right)\mathbf{X_s}\right)^{-1} \mathbf{X_s'} \left(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T}\right)\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{b_{1i}} = \overline{\mathbf{Y_i}} - \overline{\mathbf{X_i'}}\mathbf{b_s} \qquad i = 1,2\ldots,N$$

dan *standard error*nya adalah $s = \left[\sigma_\varepsilon^2 \left[\mathbf{X_s}'\left(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T}\right)\mathbf{X_s}\right]^{-1}\right]^{1/2}$ dengan

s adalah estimator dari σ.

Model *fixed effect* pada data pooling dalam bentuk matriks

$$\left(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T}\right)\mathbf{Y_i} = \left(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T}\right)\mathbf{X_{si}}\boldsymbol{\beta}_\mathbf{s} + \left(\mathbf{I_N} \otimes \mathbf{D_T}\right)\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{i}$$

Uji hipotesis model *fixed effect* pada data pooling dapat dibentuk sebagai berikut:

a. H_0: $\beta_{11} = \beta_{12} = ... = \beta_{1N}$ (β_{1j} tidak signifikan)

   H_1: terdapat β_{1j} yang tidak sama (β_{1j} signifikan)

b. Taraf signifikansi α

c. Statistik uji :

$$F = \frac{\left(\bar{e}'\bar{e} - e'e\right) / \left(N-1\right)}{e'e / \left(NT - N - K^*\right)}$$

d. Kriteria keputusan : H_0 ditolak jika $F_{hit} > F_{\alpha(N-1,\, NT-(N-(K-1)))}$

e. Perhitungan

f. Kesimpulan

2. Penerapan Model *Fixed Effect* Pada Data Pooling.

Penerapan model *fixed effect* pada data pooling adalah pada investasi 3 perusahaan (Y) dipengaruhi oleh keuntungan perusahaan (X_2) selama 10 tahun dengan model *fixed effect* pada data investasi perusahan adalah

$$\hat{Y}_{it} = -1.5138 D_{1t} + -2.8463 D_{2t} + 0.1137 D_{3t} + 1.1028 X_{2it}$$

dengan i = 1,2,3 dan t = 1,2,…,10

Model *fixed effect* pada data pooling mampu menjelaskan perbedaaan investasi ketiga perusahaan tersebut.

dan bantuan pembangunan (Y) lima Daerah Tingkat II di Propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta dipengaruhi oleh Pendapatan Asli Daerah (X_2) dan Subsidi Daerah Otonom (X_3) selama 7 tahun dengan model *fixed effect* pada data bantuan pembangunan adalah

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{it} = &-3103601 D_{1t} - 2742149 D_{2t} - 2549787 D_{3t} - 1628601 D_{4t} - 6448748 D_{5t} \\ &- 0.55312 X_{2it} + 2.696397 X_{3it}\end{aligned}.$$

dengan i = 1,2,3,4,5 dan t = 1,2,…,7

Model *fixed effect* pada data pooling mampu menjelaskan perbedaaan bantuan pembangunan untuk Daerah Tingkat II di Propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta.

Setelah mengestimasi parameter-parameter model *fixed effect* pada data pooling selanjutnya dilakukan uji hipotesis yang menunjukkan bahwa model *fixed effect* pada data pooling lebih baik daripada menggunakan model regresi pada data pooling.

B. Saran

Pada skripsi ini hanya membahas model *fixed effect* pada regresi linier ganda, pembaca dapat membahas model mengestimasi parameter model data pooling pada regresi non linier data pooling.

Lampiran

Lampiran 1

Output Tabel 3.1 Investasi dan Keuntungan dari 3 Perusahaan

Dependent Variable: Y?
Method: Pooled Least Squares
Date: 06/15/08 Time: 20:25
Sample: 1901 1910
Included observations: 10
Total panel observations 30

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.766257	0.953062	-0.803995	0.4282
X?	1.059412	0.058478	18.11633	0.0000

R-squared	0.921393	Mean dependent var	15.08467
Adjusted R-squared	0.918585	S.D. dependent var	7.253567
S.E. of regression	2.069678	Sum squared resid	119.9399
Log likelihood	-45.97802	F-statistic	328.2013
Durbin-Watson stat	1.168154	Prob(F-statistic)	0.000000

Lampiran 2

Output Tabel 3. 5 Perkembangan Bantuan Pembangunan pada Semua Dati II di propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta, Pendapatan Asli Daerah dan Subsidi Daerah Otonom

Dependent Variable: Y?
Method: Pooled Least Squares
Date: 06/17/08 Time: 21:07
Sample: 1901 1907
Included observations: 7
Total panel observations 35

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2984811.	1168319.	-2.554790	0.0156
X1?	-1.111054	0.213200	-5.211311	0.0000
X2?	3.033759	0.423211	7.168439	0.0000

R-squared	0.628060	Mean dependent var	5308911.
Adjusted R-squared	0.604814	S.D. dependent var	2770477.
S.E. of regression	1741629.	Sum squared resid	9.71E+13
Log likelihood	-515.4967	F-statistic	27.01768
Durbin-Watson stat	1.229186	Prob(F-statistic)	0.000000

Daftar Pustaka

Algifari (2000). *Teori, Kasus dan Solusi Analisis Regresi*. Yogyakarta: BPFE Yogyakarta.

Anton, Howard. (1995). *Elementary Linear Algebra* (Pantur S. dan Rizal H. Terjemahan). Jakarta: Erlangga. Buku asli diterbitkan tahun 1987.

Ayres, Frank Jr. (1997). *Matrices*. Singapore: McGraw-Hill Book Co.

Dumairy. (1999). *Matematika Terapan untuk Bisnnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE Yogyakarta .

Greene, W.H. (1997). *Econometric Analysis* 3rd ed. New Jersey: Prentice Hall International.

Gujarati, D.N. (1995). *Basic Econometrics*. New York: McGraw-Hill.

Indrawati, Yulia.(2006). *Panel Data Regression Model.* (http://www.google.co.id/search 2 hl=id&q=data+panel btnG=telusuri&meta cr% 3DcountryID). Diakses tanggal 22 maret 2008.

Intriligator, Michael D. (1978). *Econometric Model*, *Techniques & Applications*. New Jersey: Prentice Hall International.

Judge, G.G. et.al.(1988). *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics.* New York: John Wiley & Sons.

Kuncoro, M. (2001). *Metode Kuantitatif*. Yogyakarta: UPP AMP YKPN.

Maddala, G. (1977). *Econometrics*. New York: McGraw-Hill.

_________. (1992). *Introduction to Econometrics*, 2nd ed. New York: Macmillan.

Makridakis, S. *et al*. (1999). *Metode dan Aplikasi Peramalan*. (Untung S.A & Abdul B. Terjemahan). Jakarta: Erlangga.

Muirhead, Robb J. (2005). Aspects of Multivariate Statistical Theory. New York: John Wiley & Sons.

Nachrowi, D N dan Usman, H. (2006). *Pendekatan Populer Dan Praktis Ekonometrika Untuk Analisis Ekonomi Dan Keuangan.* Jakarta: Lembaga Penerbit FE UI.

Pindyk. Robert S dan Daniel L, Rubinfeld. (1998). *Econometric Model and Economic Forecasts.* New York: McGraw-Hill.

Searle, Shayle R.(1992). *Matrix Algebra Useful for Statistics*. New York: John Wiley & Sons.

Sumodiningrat, Gunawan. (1996). *Pengantar Ekonometrika.* Yogyakarta: BPFE Fakultas Ekonomi UGM.

Sunyoto, D. (1997). *Analisis Regresi dan Korelasi Bivariat*. Yogyakarta: Amara Books.

Supramono dan Sugiarto. (1993). *Statistik*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Supranto, J. (1977). *Statistik teori dan aplikasi jilid 2*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Widarjono, Agus. (2005). *Ekonometrika Teori dan Aplikasi untuk Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Ekonisia FE UI.

Lampiran

Lampiran 1

Output Tabel 3.1 Investasi dan Keuntungan dari 3 Perusahaan

Dependent Variable: Y?
Method: Pooled Least Squares
Date: 06/15/08 Time: 20:25
Sample: 1901 1910
Included observations: 10
Total panel observations 30

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.766257	0.953062	-0.803995	0.4282
X?	1.059412	0.058478	18.11633	0.0000

R-squared	0.921393	Mean dependent var	15.08467
Adjusted R-squared	0.918585	S.D. dependent var	7.253567
S.E. of regression	2.069678	Sum squared resid	119.9399
Log likelihood	-45.97802	F-statistic	328.2013
Durbin-Watson stat	1.168154	Prob(F-statistic)	0.000000

Lampiran 2

Output Tabel 3. 5 Perkembangan Bantuan Pembangunan pada Semua Dati II di propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta, Pendapatan Asli Daerah dan Subsidi Daerah Otonom

Dependent Variable: Y?
Method: Pooled Least Squares
Date: 06/17/08 Time: 21:07
Sample: 1901 1907
Included observations: 7
Total panel observations 35

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2984811.	1168319.	-2.554790	0.0156
X1?	-1.111054	0.213200	-5.211311	0.0000
X2?	3.033759	0.423211	7.168439	0.0000

R-squared	0.628060	Mean dependent var	5308911.
Adjusted R-squared	0.604814	S.D. dependent var	2770477.
S.E. of regression	1741629.	Sum squared resid	9.71E+13
Log likelihood	-515.4967	F-statistic	27.01768
Durbin-Watson stat	1.229186	Prob(F-statistic)	0.000000